Numerické řešení soustavy lineárních rovnic

Předpokládáme, že $\mathbb{A}$ je regulární matice n-tého řádu. Potom soustava

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

má pro každé $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$ právě jedno řešení.

Metody řešení můžeme volit

Přímé, např.

- Cramerovo pravidlo,
- Gaussova eliminace,
- Jordanova eliminace,
- LU rozklad.

Iterační, např.

- Jacobiova metoda,
- Gaussova-Seidelova metoda,
- Metoda největšího spádu,
- Gradientní metoda.

Prvky matice $\mathbb{A}$ i prvky vektoru $\mathbf{b}$ mohou být zatíženy chybami měření, nebo chybami vzniklými v průběhu výpočtu. V tom případě vhodnější metodou řešení budou iterační postupy. Otázkou je, za jakých podmínek kterou iterační metodu zvolit. Částečnou odpovědí je podmíněnost matice, která souvisí s normou matice.

Norma matice

Každé čtvercové matici $\mathbb{A}$, n-tého řádu, přiřadíme číslo $\|\mathbb{A}\|$, normu matice, takové, že

1. $\|\mathbb{A}\| \geq 0$, $\|\mathbb{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbb{A} = \mathbb{O}$,
2. $\|\alpha\mathbb{A}\| = |\alpha|\|\mathbb{A}\|$,
3. $\|\mathbb{A} + \mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\| + \|\mathbb{B}\|$,
4. $\|\mathbb{A}\mathbb{B}\| \leq \|\mathbb{A}\|\|\mathbb{B}\|$.

Ze 4. vlastnosti vyplývá, že maticová norma je analogická k normě vektoru. Je

$$\|\mathbb{A}\mathbf{x}\| \leq \|\mathbb{A}\|\|\mathbf{x}\|$$

(podmínka konzistence). Odtud pro maticovou normu dostáváme

$$\|\mathbb{A}\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbb{A}\mathbf{x}\|.$$

Z normy vektoru pak můžeme odvodit normy matic:

- Z krychlové normy vektoru $\|\mathbf{x}\| = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$ **řádkovou normu matice**

$$\|\mathbb{A}\| = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

- Z oktaedrické normy vektoru $\|\mathbf{x}\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ **sloupcovou normu matice**

$$\|\mathbb{A}\| = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

- Z euklidovské normy vektoru $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ **euklidovskou normu matice**

$$\|\mathbb{A}\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

Podmíněnost soustavy rovnic, (matice)

Označme $\delta\,\mathbf{b}$ vektor chyb vektoru $\mathbf{b}$ a $\delta\,\mathbf{x}$ odpovídající vektor chyb řešení. Potom

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(\mathbf{x} + \delta\,\mathbf{x}) &= \mathbf{b} + \delta\,\mathbf{b}, \\ \mathbb{A}(\mathbf{x} + \delta\,\mathbf{x}) - \mathbb{A}\,\mathbf{x} &= \mathbf{b} + \delta\,\mathbf{b} - \mathbf{b}, \\ \delta\,\mathbf{x} &= \mathbb{A}^{-1}\,\delta\,\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Je zřejmé, že

$$\|\mathbf{b}\| \le \|\mathbb{A}\|\|\mathbf{x}\|\,,\ \|\delta\,\mathbf{x}\| \le \|\mathbb{A}^{-1}\|\|\delta\,\mathbf{b}\| \implies \|\mathbf{b}\|\|\delta\,\mathbf{x}\| \le \|\mathbb{A}\|\|\mathbb{A}^{-1}\|\|\mathbf{x}\|\|\delta\,\mathbf{b}\|.$$

Odtud

$$\frac{\|\delta\,\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \|\mathbb{A}\|\|\mathbb{A}^{-1}\|\frac{\|\delta\,\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

Číslo $C_p = \|\mathbb{A}\|\|\mathbb{A}^{-1}\|$ se nazývá číslo podmíněnosti soustavy $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, matice $\mathbb{A}$, vzhledem k normě. Je to nejmenší horní odhad poměru relativní chyby výsledku a relativní chyby pravé strany soustavy.

Analogicky bychom odvodili chybu pro chybami zatíženou matici $\mathbb{A}$:

$$(\mathbb{A} + \delta\mathbb{A})(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} \implies \delta\mathbf{x} = -\mathbb{A}^{-1}\,\delta\mathbb{A}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x})$$

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}\|} \le \|\mathbb{A}^{-1}\|\|\mathbb{A}\|\frac{\|\delta\mathbb{A}\|}{\|\mathbb{A}\|}.$$

Iterační metody

Má-li soustava $\mathbb{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ právě jedno řešení $\mathbf{x}_t = \mathbb{A}^{-1}\,\mathbf{b}$, upravíme ji na vhodný iterační tvar

$$\mathbf{x} = \mathbb{B}\,\mathbf{x} + \mathbf{c},$$

který určí posloupnost postupných aproximací s libovolnou volbou nulté aproximace

$$\mathbf{x}^{(0)}\,,\ \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbb{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}.$$

Ukončení výpočtu je řízeno buď počtem iterací, nebo podmínkou $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\| < \varepsilon$.

Postačující podmínka konvergence posloupnosti

Je-li $\|\mathbb{B}\| \leq q < 1$, potom posloupnost $(\mathbf{x}^{(k)})$ konverguje pro libovolnou nultou aproximaci a je
$$\lim \mathbf{x}^{(k)} = (\mathbb{E} - \mathbb{B})^{-1}\mathbf{c} = \mathbf{x}_t.$$

Odhad chyby

Pro normu odchylky libovolné aproximace od řešení je

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}_t\| = \|\mathbb{B}(\mathbf{x}^{(k-1)} - \mathbf{x}_t)\| \leq q\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}_t\| + q\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|.$$

Odtud plyne podmínka
$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}_t\| \leq \frac{q}{1-q}\varepsilon.$$

Kvadratický funkcionál

Numerické řešení soustavy lineárních rovnic

Mějme pro názornost soustavu dvou lineárních algebraických rovnic

(1) $$2x - y - 3 = 0\,, \quad -x + 3y - 2 = 0.$$

Její řešení je bod $S = [\frac{11}{5}, \frac{7}{5}]$ (průsečík přímek daných rovnicemi (1)).

Na obě rovnice (1) můžeme pohlížet jako na nulové vrstevnice lineárních funkcí

(2) $$f_x(x,y) = 2x - y - 3\,, \quad f_y(x,y) = -x + 3y - 2.$$

Na funkce (2) můžeme pohlížet jako na parciální derivace nějaké kvadratické funkce $z = f(x,y)$. Pro tuto funkci potom platí

$$f(x,y) = \int (2x - y - 3)dx + C(y),$$

kde $C(y)$ je nějaká funkce proměnné y. Integrováním dostaneme

(3) $$f(x,y) = x^2 - xy - 3x + C(y).$$

Pro funkci f máme ještě druhou podmínku ve (2), kterou porovnáme s parciální derivací funkce ve (3):
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -x + C'(y) = -x + 3y - 2.$$

Odtud
$$C'(y) = 3y - 2\,, \text{ nebo-li } C(y) = \tfrac{3}{2}y^2 - 2y + c,$$

kde c je integrační konstanta. Např. pro $c = 0$ dostáváme pro funkci f vyjádření

(4) $$f(x,y) = x^2 - xy - 3x + \tfrac{3}{2}y^2 - 2y.$$

Vrstevnice funkce f, o nulové kótě, je elipsa procházející počátkem (odůvodněte!). Její rovnice v homogenních souřadnicích je

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1, & -\frac{1}{2}, & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2}, & \frac{3}{2}, & -1 \\ -\frac{3}{2}, & -1, & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0. \tag{5}$$

Střed S elipsy (4) má homogenní souřadnice $(\frac{11}{4}, \frac{7}{4}, \frac{5}{4})$ a příslušné kartézské souřadnice jsou $[\frac{11}{5}, \frac{7}{5}]$. Střed S je kolmý průmět, do roviny xy, vrcholu eliptického paraboloidu, který je grafem kvadratické funkce f. Zároveň je to hledané řešení soustavy (1).

Přejděme v rovnici (5) zpět ke kartézským souřadnicím, tj. vydělíme rovnici $x_3^2 \neq 0$, pak $(x_1, x_2, x_3) = x_3(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1) = x_3(x, y, 1)$ a v rovnici (5) proveďme násobení. Rovnice (5) bude mít tvar

$$(x - \tfrac{1}{2}y - \tfrac{3}{2})x + (-\tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2}y - 1)y - (\tfrac{3}{2}x + y)\cdot 1 = 0.$$

Vynásobíme-li rovnici dvěma a přepíšeme pomocí matic, dostáváme

$$\tfrac{1}{2}(x, y)\begin{pmatrix} 2, & -1 \\ -1, & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (x, y)\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0. \tag{6}$$

Abychom lépe viděli význam rovnice (6), přepíšeme ji a soustavu (1) do symbolického maticového zápisu

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}\,\mathbb{A}\mathbf{x}^T - \mathbf{x}\,\mathbf{b}^T = 0\,, \text{kde} \quad \mathbb{A}\mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T.$$

Můžeme říci, že řešení soustavy lineárních algebraických rovnic $\mathbb{A}\mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T$ je minimem kvadratické funkce

$$f(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\mathbf{y}\,\mathbb{A}\mathbf{y}^T - \mathbf{y}\,\mathbf{b}^T.$$

Podle uvedeného příkladu soustavy (1) bychom mohli usoudit, že problém řešení soustavy lineárních algebraických rovnic můžeme převést na problém hledání minima kvadratické funkce. Tuto doměnku se pokusíme ozřejmit na základě vlastností bilineární formy. Všechny další úvahy a výpočty budeme provádět v prostoru uspořádaných n-tic reálných čísel. Stejným symbolem, tučným malým písmenkem, budeme popisovat jak vektory, tak body, jako n-tice reálných čísel.

Nechť F je bilineární forma na prostoru $\mathbb{R}^n$. Potom

$$F(\mathbf{y}-\mathbf{x}, \mathbf{y}-\mathbf{x}) = F(\mathbf{y}, \mathbf{y}) - F(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + F(\mathbf{x}, \mathbf{x}).$$

Je-li F symetrická bilineární forma, je

$$F_2(\mathbf{y}-\mathbf{x}) = F_2(\mathbf{y}) - 2F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + F_2(\mathbf{x}). \tag{7}$$

Odtud dostáváme

$$F_2(\mathbf{y}) - 2F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F_2(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - F_2(\mathbf{x}).$$

Pro každé $\mathbf{x}$ pevné, definujme funkci

$$f(\mathbf{y}) = \tfrac{1}{2}F_2(\mathbf{y}) - F(\mathbf{x},\mathbf{y}). \tag{8}$$

Podle (7) je $f(\mathbf{y})$ minimální právě když $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, tj.

$$f(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y}).$$

Ve zvolené bázi $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ má (8) tvar

$$f(\mathbf{y}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{y}\,\mathbb{A}\,\mathbf{y}^T - \mathbf{y}\,\mathbf{b}^T,$$

kde $\mathbb{A}$ je matice symetrické bilineární formy F s pozitivně definitní kvadratickou formou F_2.

Jestliže $\mathbf{x}^*$ je řešení soustavy $\mathbb{A}\mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T$, potom pro aproximaci $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \mathbf{v}$, kde $\mathbf{v}$ je vektor oprav, je

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{x}^* + \mathbf{v})\,\mathbb{A}(\mathbf{x}^* + \mathbf{v})^T - (\mathbf{x}^* + \mathbf{v})\,\mathbf{b}^T = \tfrac{1}{2}(\mathbf{x}^* + \mathbf{v})(\mathbf{b}^T + \mathbb{A}\,\mathbf{v}^T) - (\mathbf{x}^* + \mathbf{v})\mathbf{b}^T = \\ &= -\tfrac{1}{2}\,\mathbf{x}^*\mathbf{b}^T + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{v}\,\mathbb{A}\,\mathbf{v}^T. \end{aligned}$$

Odtud, vzhledem k tomu, že

$$f(\mathbf{x}) + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{x}^*\mathbf{b}^T = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{v}\,\mathbb{A}\,\mathbf{v}^T \geq 0,$$

má funkce f minimum v bodě $\mathbf{x}^*$ právě když $\mathbf{v} = \mathbf{o}$.

Jacobiova metoda

je nejjednodušší iterační metoda pro řešení soustavy $\mathbb{A}\mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T$. Kvadratickou funkci f zúžíme na funkci $\overline{f}$ jedné proměnné $t = x_i$, podle které budeme parciálně derivovat:

$$\overline{f}(t) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \tfrac{1}{2}a_{ii}t^2 + t\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j - b_i t + c.$$

Potom

$$\overline{f}'(t) = a_{ii}t + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j - b_i = 0$$

je rovnice pro i-tou souřadnici bodu, ve kterém má funkce f extrém, tj.

$$t = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j\right).$$

Označíme-li $t = x_i^{(k+1)}$ pro i-tou souřadnici aproximace $\mathbf{x}^{(k+1)}$, dostáváme iterační vzorec pro Jacobiovu iterační metodu:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j\right), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Z geometrického hlediska, funkce f má extrémy v nadrovinách $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$.

Použití vzorce (9) ukážeme na soustavě uvedené v úvodu odstavce. Danou soustavu nejdříve upravíme podle vzorce (9) na iterační tvar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{(k)}. \tag{10}$$

Zvolíme nultou aproximaci, např. $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0)$. Potom podle (10) postupným výpočtem dostáváme posloupnost bodů

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(1)} &= (\tfrac{3}{2}, \tfrac{2}{3}) \doteq (1.5, 0.\overline{6}) \\
\mathbf{x}^{(2)} &= (\tfrac{11}{6}, \tfrac{7}{6}) \doteq (1.8\overline{3}, 1.1\overline{6}) \\
\mathbf{x}^{(3)} &= (\tfrac{25}{12}, \tfrac{23}{18}) \doteq (2.08\overline{3}, 1.2\overline{7}) \\
\mathbf{x}^{(4)} &= (\tfrac{77}{36}, \tfrac{49}{36}) \doteq (2.13\overline{8}, 1.36\overline{1}) \\
\mathbf{x}^{(5)} &= (\tfrac{157}{72}, \tfrac{149}{108}) \doteq (2.180\overline{5}, 1.3796)
\end{aligned}$$

atd. Přesné řešení je $\mathbf{x}^* = (\frac{11}{5}, \frac{7}{5}) = (2.2, 1.4)$.

Gaussova-Seidelova metoda

vychází z Jacobiovy iterační metody. Hodnoty i-té souřadnice, vypočítané v $(k+1)$ aproximaci, využívá k výpočtu $(i+1)$ souřadnice této aproximace, atd. Iterační vzorec je

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right).$$

Pro danou soustavu, při stejné nulté aproximaci jako u Jacobiovy metody, potom první tři aproximace jsou

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(1)} &= (\tfrac{3}{2}, \tfrac{7}{6}) \doteq (1.5, 1.1\overline{6}) \\
\mathbf{x}^{(2)} &= (\tfrac{25}{12}, \tfrac{49}{36}) \doteq (2.08\overline{3}, 1.36\overline{1}) \\
\mathbf{x}^{(3)} &= (\tfrac{157}{72}, \tfrac{301}{216}) \doteq (2.180\overline{5}, 1.3935)
\end{aligned}$$

atd.

Metoda největšího spádu

U funkce více proměnných, kromě parciálních derivací, jsme v bodě definovali derivaci v libovolném jednotkovém směru. Ukázali jsme, že směr, ve kterém je derivace extremální, je gradient funkce. Z těchto poznatků vychází metoda největšího spádu.

Hledáme extrém funkce

$$f(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}\, \mathbf{x}\, \mathbb{A}\, \mathbf{x}^T - \mathbf{x}\, \mathbf{b}^T$$

v bodě $\mathbf{x}_0$ ve směru $\mathbf{v}_0$. Ten bude ve směru gradientu, tj. vektoru, jehož souřadnice jsou parciální derivace funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$:

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = \mathbb{A}\mathbf{x}_0{}^T - \mathbf{b}^T,$$

označíme jej $-\mathbf{r}_0{}^T$ a nazveme reziduum.

Funkci f zúžíme na body přímky

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \alpha\,\mathbf{v}_0. \tag{11}$$

Potom

$$\begin{aligned}\overline{f}(\alpha) &= f(\mathbf{x}_0 + \alpha\,\mathbf{v}_0) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{x}_0 + \alpha\,\mathbf{v}_0)\,\mathbb{A}\,(\mathbf{x}_0 + \alpha\,\mathbf{v}_0)^T - (\mathbf{x}_0 + \alpha\,\mathbf{v}_0)\,\mathbf{b}^T,\\ \overline{f}'(\alpha) &= \mathbf{v}_0\,\mathbb{A}\,(\mathbf{x}_0 + \alpha\,\mathbf{v}_0)^T - \mathbf{v}_0\,\mathbf{b}^T.\end{aligned}$$

Derivace bude nulová, právě když

$$\alpha = \frac{\mathbf{v}_0\mathbf{b}^T - \mathbf{v}_0\mathbb{A}\mathbf{x}_0{}^T}{\mathbf{v}_0\mathbb{A}\,\mathbf{v}_0{}^T} = \frac{\mathbf{v}_0(\mathbf{b}^T - \mathbb{A}\mathbf{x}_0)}{\mathbf{v}_0\mathbb{A}\,\mathbf{v}_0{}^T}.$$

Po dosazení do čitatele zlomku rezidua dostáváme

$$\alpha = \frac{\mathbf{v}_0\mathbf{r}_0^T}{\mathbf{v}_0\mathbb{A}\,\mathbf{v}_0{}^T}. \tag{12}$$

Extrém funkce f ve směru $\mathbf{v}_0$ je v bodě (podle(11))

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \frac{\mathbf{v}_0\mathbf{r}_0^T}{\mathbf{v}_0\mathbb{A}\,\mathbf{v}_0{}^T}\mathbf{v}_0. \tag{13}$$

Protože derivace je extremální ve směru gradientu, je $\mathbf{v}_0 = -\mathbf{r}_0$. Potom $(k+1)$ bod, ve kterém má funkce f extrém, je

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \frac{\mathbf{r}^{(k)}\mathbf{r}^{(k)T}}{\mathbf{r}^{(k)}\mathbb{A}\,\mathbf{r}^{(k)T}}\mathbf{r}^{(k)}.$$

Metoda největšího spádu je příliš závislá na volbě počáteční podmínky a při nevhodné volbě nemusí konvergovat k předpokládanému řešení. Tato metoda se využívá k odvození k další metodě.

Metoda sdružených gradientů

Minimalizujeme funkci f ve směrech $\mathbf{v}$ určených ortogonalizací reziduí vzhledem ke skalárnímu součinu, který je dán pozitivně definitní maticí $\mathbb{A}$, tj.

$$\mathbf{v}^{(i)} \perp \mathbf{v}^{(j)},\ i \neq j \Longleftrightarrow \mathbf{v}^{(i)}\mathbb{A}\,\mathbf{v}^{(j)T} = 0.$$

Počáteční aproximací je bod $\mathbf{x}^{(0)}$. Počáteční směr je

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b}^T - \mathbb{A}\,\mathbf{x}^{(0)T}.$$

Odtud podle (12) a (13) je

$$\alpha^{(0)} = \frac{\mathbf{v}^{(0)}\,\mathbf{r}^{(0)}}{\mathbf{v}^{(0)}\mathbb{A}\,\mathbf{v}^{(0)}}\,,\ \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \alpha^{(0)}\mathbf{v}^{(0)T}\,,\ \mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{r}^{(0)} - \alpha^{(0)}\mathbb{A}\,\mathbf{v}^{(0)T}.$$

Potom ortogonální vektor $\mathbf{v}^{(1)}$ k vektoru $\mathbf{v}^{(0)}$ je

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}^{(1)} &= \mathbf{r}^{(1)} + \beta^{(1)}\,\mathbf{v}^{(0)} \implies 0 = \mathbf{r}^{(1)}\mathbb{A}\,\mathbf{v}^{(0)T} + \beta^{(1)}\mathbf{v}^{(0)}\mathbb{A}\,\mathbf{v}^{(0)T}\\
\beta^{(1)} &= -\frac{\mathbf{r}^{(1)}\mathbb{A}\,\mathbf{v}^{(0)T}}{\mathbf{v}^{(0)}\mathbb{A}\,\mathbf{v}^{(0)T}},\\
\mathbf{v}^{(1)} &= \mathbf{r}^{(1)} - \frac{\mathbf{r}^{(1)}\mathbb{A}\,\mathbf{v}^{(0)T}}{\mathbf{v}^{(0)}\mathbb{A}\,\mathbf{v}^{(0)T}}\mathbf{v}^{(0)}.
\end{aligned}$$

Nyní vypočítáme

$$\alpha^{(1)} = \frac{\mathbf{v}^{(1)}\,\mathbf{r}^{(1)T}}{\mathbf{v}^{(1)}\mathbb{A}\,\mathbf{v}^{(1)T}}\,,\ \mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + \alpha^{(1)}\mathbf{v}^{(1)}\,,\ \mathbf{r}^{(2)} = \mathbf{r}^{(1)} - \alpha^{(1)}\mathbb{A}\,\mathbf{v}^{(1)T},$$

atd.

Metoda sdružených gradientů po konečně mnoha krocích (k krocích) dojde k přesnému (až na zaokrouhlovací chyby) řešení. Ukážeme na příkladu. Soustava

$$\begin{pmatrix} 4, & -1, & 0\\ -1, & 4, & -1\\ 0, & -1, & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\\ 6\\ 2 \end{pmatrix}$$

má řešení $(1, 2, 1)$.

Podle předchozích vzorců, zvolíme počáteční aproximaci $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)$, potom

$$\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)} = (2, 6, 2) = 2(1, 3, 1)\,,\ \alpha^{(0)} = \tfrac{11}{32}$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = \tfrac{11}{16}(1, 3, 1)\,,$$

$$\mathbf{r}^{(1)} = \tfrac{7}{16}(3, -2, 3)\,,\ \beta^{(1)} = \tfrac{49}{512}\,,\ \mathbf{v}^{(1)} = \tfrac{77}{256}(5, -1, 5)\,,\ \alpha^{(1)} = \tfrac{16}{77}$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = (1, 2, 1).$$

Žádná metoda není univerzální, vždy existují příklady, na které je ta či jiná metoda nevhodná. Proto se hledají stále další a další metody řešení a také podmínky, za kterých je vhodné metodu použít. O tom ale v knihách věnovaných numerickým metodám.