Numerické řešení rovnice pro jednu neznámou

Z rovnic $f(x) = 0$ pro jednu neznámou x umíme najít přesné řešení u lineárních a kvadratických rovnic. Z ostatních rovnic pouze u některých speciálních případů. Jejich přibližné řešení můžeme najít pomocí kalkulačky či počítače, nebo některou z numerických metod. Ukážeme si čtyři z těchto metod, u kterých využijeme vlastností funkcí jedné reálné proměnné.

V prvních třech případech budeme předpokládat, že funkce f je na intervalu $\langle a, b\rangle$ spojitá a ryze monotonní a $f(a)f(b) < 0$. Potom existuje právě jedno řešení $x_0 \in (a, b)$ takové, že $f(x_0) = 0$, které budeme hledat jako limitu, případně n-tý člen, sestrojené posloupnosti. Algoritmus končíme dvěma způsoby: buď počtem členů posloupnosti, nebo dosaženou přesností dvou po sobě jdoucích členů posloupnosti.

Metoda půlení intervalu

Číslo x_0 budeme hledat postupným půlením (zmenšováním) intervalu $\langle a, b\rangle$.

1. Určíme střed $x_1 = \frac{1}{2}(a + b)$ intervalu $\langle a, b\rangle$ a hodnotu funkce f v něm.
2. Je-li $f(x_1) = 0$, je x_1 kořen rovnice.
3. Je-li $f(a)f(x_1) > 0$, označíme $a_1 = x_1$, $b_1 = b$, nebo je-li $f(a)f(x_1) < 0$, označíme $a_1 = a$, $b_1 = x_1$ a zopakujeme krok 1, tj. hledáme střed x_2 intervalu $\langle a_1, b_1\rangle$.

Tak dostáváme posloupnost intervalů a posloupnost jejich velikostí:

$\langle a_1, b_1\rangle, \quad |a_1 - b_1| = \frac{1}{2}|a - b|,$

$\langle a_2, b_2\rangle, \quad |a_2 - b_2| = \frac{1}{2^2}|a - b|,$

....

$\langle a_n, b_n\rangle, \quad |a_n - b_n| = \frac{1}{2^n}|a - b|.$

Je zřejmé, že limita posloupnosti velikostí intervalů je nula

$\lim |a_n - b_n| = \lim \dfrac{1}{2^n}|a - b| = 0$, a tudíž

$\lim a_n = \lim b_n = x_0.$

Metoda sečen

Sestrojíme posloupnost průsečíků sečen grafu funkce f s osou x. Sečna určená body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$ má rovnici

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a), \text{ resp. } y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b).$$

Její průsečík s osou x je

$$x_1 = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)}f(a), \text{ resp. } x_1 = b - \frac{b - a}{f(b) - f(a)}f(b).$$

Určíme hodnotu funkce f v bodě x_1.

1. Je-li $f(x_1) = 0$, je x_1 kořenem rovnice $f(x) = 0$.
2. Je-li $f(a)f(x_1) > 0$, položíme $a_1 = x_1$, $b_1 = b$, je-li $f(a)f(x_1) < 0$, položíme $a_1 = a$, $b_1 = x_1$ a postup opakujeme pro interval $\langle a_1, b_1 \rangle$.

Dostáváme tak posloupnost průsečíků sečen grafu funkce f s osou x, jejíž $n+1$ člen je

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} f(x_n),$$

která zřejmě konverguje k řešení rovnice $f(x) = 0$.

Má-li funkce f na interval (a, b) spojitou derivaci, pak

$$|x_{n+1} - x_n| = \left| \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} f(x_n) \right| = \frac{|f(x)|}{|f'(c)|},$$

kde $c \in (a, b)$. Je-li m minimum funkce f', máme pro odhad chyby diference sousedních členů posloupnosti $|x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{m}|f(x)|$.

Newtonova metoda

Ve třetí metodě pro numerické řešení rovnice $f(x) = 0$ pro jednu reálnou neznámou musíme předpokládat, že

- funkce f je na $\langle a, b \rangle$ spojitá, ryze monotonní a $f(a)f(b) < 0$,
- f má vlastní derivaci, která je kladná, resp. záporná na $\langle a, b \rangle$.

Řešení rovnice budeme hledat jako limitu posloupnosti, nebo její n-tý člen, průsečíků tečen grafu funkce f.

Tečna grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$, resp. $[b, f(b)]$ má rovnici

$$y = f'(a)(x - a) + f(a), \text{ resp. } y = f'(b)(x - b) + f(b).$$

Za první člen posloupnosti volíme průsečík té tečny, který je v intervalu (a, b). Nechť je to např.

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

(Analogicky pro průsečík $x_1 = b - \dfrac{f(b)}{f'(b)}$ druhé tečny.)

Je-li $f(x_1) = 0$, je x_1 kořenem rovnice $f(x) = 0$.

Je-li $f(x_1)f(a) < 0$, označíme $a_1 = a$ a $b_1 = x_1$, je-li $f(x_1)f(a) > 0$, označíme $a_1 = x_1$ a $b_1 = b$. Na intervalu $\langle a_1, b_1 \rangle$ určíme druhý člen posloupnosti podle rekurentního vzorce

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

Existuje-li limita posloupnosti (x_n), je řešením rovnice $f(x) = 0$.

Iterační metoda

Rovnici $f(x) = 0$ přepíšeme na vhodný iterační tvar $x = \varphi(x)$ podle následujících podmínek:

- funkce φ je definovaná na $\langle a, b\rangle$,
- existuje $\xi \in \langle 0, 1)$ takové, že

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq \xi |x - x'|$$

pro každé $x, x' \in \langle a, b\rangle$.

Potom existuje právě jeden kořen $\alpha \in \langle a, b\rangle$ rovnice $x = \varphi(x)$. Iterační posloupnost

$$x_n = \varphi(x_{n-1})$$

konverguje k α a platí

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{\xi}{1-\xi} |x_n - x_{n-1}|.$$

Má-li funkce φ derivaci na celém $\langle a, b\rangle$, potom

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| = |\varphi'(c)(x - x')| \leq \xi |x - x'|.$$

Výhoda iterační metody je v tom, že se zaokrouhlovací chyby nehromadí. Každou iteraci můžeme chápat jako novou počáteční aproximaci.

Pro rychlejší konvergenci lze použít **iterační vzorec vyššího řádu**.

Iterační funkce φ se nazývá funkce r-tého řádu, jestliže platí

$$\varphi(x_0) = x_0\,,\ \ \varphi'(x_0) = \varphi''(x_0) = \cdots = \varphi^{(r-1)}(x_0) = 0.$$

Iterační funkci budeme hledat jako racionální funkci

$$\varphi(x) = x - h\frac{1 + A_1 h + A_2 h^2 + \cdots + A_s h^s}{1 + B_1 h + B_2 h^2 + \cdots + B_s h^s}, \tag{1}$$

kde A_i, B_i jsou funkce x. Vyjdeme z Newtonovy iterační funkce. Označíme-li $h = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, potom vzorec

$$\varphi_N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - h$$

dostaneme z (1) volbou $s = 0$.

Pro iterační metodu 3. řádu v (1) zvolíme $s = 1$ a $B_1 = 0$, tj.

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x - h(1 + A_1 h)\,, \\ \varphi'(x) &= 1 - h' - A'_1 h^2 - 2A_1 h h'\,, \\ \varphi''(x) &= -h'' - A''_1 h^2 - 4A'_1 h h' - 2A_1 h'^2 - 2A_1 h h''. \end{aligned} \tag{2}$$

Pro funkci $h = f/f'$ platí

$$h' = 1 - \frac{ff''}{f'^2}\,,$$
$$h'' = -\frac{(f'f'' + ff''')f' - 2ff''^2}{f'^3}.$$

Postupným dosazováním a úpravami dostáváme

$$\begin{aligned} f(x_0) = 0 &\implies h(x_0) = 0\,,\ h'(x_0) = 1\,,\ h''(x_0) = -\frac{f''(x_0)}{f'(x_0)} \\ \varphi'(x_0) = 0 &\implies \varphi''(x_0) = \frac{f''(x_0)}{f'(x_0)} - 2A_1(x_0)\,, \\ \varphi''(x_0) = 0 &\implies A_1(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2f'(x_0)}. \end{aligned}$$

Dosadíme-li do (2) $A_1 = f''(x)/2f'(x)$, dostaneme iterační vzorec 3. řádu

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{1}{2}\frac{f''(x)f^2(x)}{(f'(x))^3}.$$

Keplerova rovnice

V eliptickém pohybu oběžnice P kolem Slunce S (ohnisko dráhy a počátek kartézské i polární soustavy souřadnic, s polární osou x k perihelu), definujeme

- $\nu = \sphericalangle(xSP)$ je **pravá anomálie**. Vzhledem k nestejné rychlosti oběžnic v různých bodech dráhy není pravá anomálie úměrná času a definuje se
- **střední anomálie** M, tj. oblouk vrcholové kružnice eliptické dráhy, který by planeta urazila za stejnou dobu, kterou běží ν. Střední anomálie je tudíž úměrná času.
- Jako pomocný úhel se definuje **excentrická anomálie** E. Je to úhel průvodiče planety ze středu dráhy od perihela.

Vztah mezi pravou a střední anomálii popsal Kepler rovnicí

$$E = M + e \sin E,$$

kde e je numerická excentricita dráhy ($e^2 = (a^2 - b^2)/a^2$). Pak průvodič r planety, vzhledem ke Slunci, je

$$r = a(1 - a\cos E),$$

kde a je hlavní poloosa dráhy.

Řešte Keplerovu rovnici pro dráhu Jupitera (23.8.1996): $a = 5.2033\,AU$, $e = 0.0484$ a $M = 8°k$, $k = 1,\ldots,44$.