Vlastní čísla matic

Matice $\mathbb{A}$ je čtvercová řádu n. Číslo λ takové, že soustava

$$\mathbb{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\,, \text{ resp. } (\mathbb{A} - \lambda\mathbb{E})\mathbf{x} = \mathbf{o}$$

má nenulové řešení, se nazývá **vlastní číslo** matice $\mathbb{A}$ a odpovídající řešení $\mathbf{x}$ se nazývá **vlastní vektor**. Vlastní čísla jsou řešení algebraické rovnice n-tého stupně

$$|\mathbb{A} - \lambda\mathbb{E}| = 0,$$

která se nazývá **charakteristická rovnice** matice $\mathbb{A}$.

Čtvercová matice má právě n vlastních čísel $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (počítaných s násobností). Diagonální matice

$$\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

se nazývá **spektrální matice** k matici $\mathbb{A}$.

Je-li matice $\mathbb{A}_s$ symetrická, potom platí:

1. Všechna vlastní čísla matice $\mathbb{A}_s$ jsou reálná.
2. Různým vlastním číslům matice $\mathbb{A}_s$ odpovídají ortogonální vlastní vektory.
3. k-násobnému vlastnímu číslu matice $\mathbb{A}_s$ odpovídá k-ortogonálních (tj. lineárně nezávislých) vektorů.
4. Je-li navíc matice $\mathbb{A}_s$ pozitivně definitní, jsou její vlastní čísla kladná.

Říkáme, že matice $\mathbb{A}$ je podobná matici $\mathbb{B}$, značíme $\mathbb{A} \sim \mathbb{B}$, jestliže existuje regulární matice $\mathbb{P}$ taková, že platí

$$\mathbb{B} = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}\,\mathbb{P}.$$

Podobnost matic je ekvivalence:

a) $\mathbb{A} \sim \mathbb{A}$,
b) $\mathbb{A} \sim \mathbb{B} \implies \mathbb{B} \sim \mathbb{A}$,
c) $\mathbb{A} \sim \mathbb{B},\ \mathbb{B} \sim \mathbb{C} \implies \mathbb{A} \sim \mathbb{C}$.

Dále platí:

5. Podobné matice mají stejná vlastní čísla.
6. Je-li $\mathbf{x}$ vlastní vektor matice $\mathbb{A}$, potom $\mathbb{P}\mathbf{x}$ je vlastní vektor podobné matice $\mathbb{B}$.
7. $\Lambda = \mathbb{X}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{X}$, kde matice $\mathbb{X}$ má sloupce z vlastních vektorů matice $\mathbb{A}$.

Úloze najít všechna vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ se říká úplný problém vlastních čísel.

Částečný problém hledá buď největší nebo nejmenší vlastní číslo, např. **mocninnou metodou**.

Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jsou všechna vlastní čísla čtvercové matice $\mathbb{A}$ a jim odpovídající vlastní vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně nezávislé. Dále nechť existuje jediné vlastní číslo s největší absolutní hodnotou. Pak je srovnáme podle velikosti jejich absolutních hodnot:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|.$$

Zvolíme vektor $\mathbf{x}^{(0)}$ a napíšeme ho jako lineární kombinaci vlatních vektorů

$$\mathbf{x}^{(0)} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n.$$

Sestrojíme posloupnost $(\mathbf{x}^{(k)})$ takovou, že

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbb{A}\,\mathbf{x}^{(k-1)}.$$

Odtud postupným dosazováním dostaneme

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbb{A}^2\mathbf{x}^{(k-2)} = \cdots = \mathbb{A}^k\mathbf{x}^{(0)}.$$

Protože

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbb{A}^k(\alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n), \ \mathbb{A}\,\mathbf{u}_i = \lambda_i\mathbf{u}_i,$$

je

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(k)} &= \alpha_1\lambda_1^k\mathbf{u}_1 + \alpha_2\lambda_2^k\mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n^k\mathbf{u}_n,\\
\mathbf{x}^{(k)} &= \lambda_1^k(\alpha_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_k),
\end{aligned}$$

kde $\mathbf{w}_k = \sum_{i=2}^n \alpha_i(\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^k\mathbf{u}_i$.

Analogicky pro $k+1$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbb{A}\,\mathbf{x}^{(k)} = \lambda_1^{k+1}(\alpha_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_{k+1}),$$

kde $\mathbf{w}_k = \frac{1}{\lambda_1}\mathbb{A}\,\mathbf{w}_k$.

Potom j-tá složka k-té aproximace je

$$x_j^{(k)} = \lambda_1^k(\alpha_1 u_{1j} + w_{kj}).$$

Protože je $|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}| < 1$ pro $i \geq 2$, je $\lim \mathbf{w}_k = \lim \mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{o}$ a

$$\lambda_1 = \lim \frac{x_j^{(k+1)}}{x_j^{(k)}} = \lim \frac{\lambda_1^{k+1}(\alpha_1 u_{1j} + w_{k+1,j})}{\lambda_1^k(\alpha_1 u_{1j} + w_{kj})}.$$

Pro symetrickou matici je $\mathbf{u}_i\mathbf{u}_j = \delta_{ij}$ a

$$\lambda_1 = \lim \frac{\mathbf{x}^{(k)}\mathbb{A}\mathbf{x}^{(k)}}{\mathbf{x}^{(k)}\mathbf{x}^{(k)}} = \lim \frac{\mathbf{x}^{(k)}\mathbf{x}^{(k+1)}}{\mathbf{x}^{(k)}\mathbf{x}^{(k)}}.$$