Interpolační funkce a křivky

Interpolační funkce

Problém. *Pro danou funkci f máme její funkční hodnoty, získané např. měřením nebo komplikovanými výpočty, v bodech $x_0, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$. Chceme, na základě těchto hodnot, určit hodnoty funkce i v dalších bodech intervalu $\langle \{\min x_i; i = 0, \dots, m\}, \{\max x_i;$
$i = 0, \dots, m\} \rangle$.*

Interpolační polynomy

Označme $f_i = f(x_i)$ pro $i = 0, \dots, m$. Víme, že řadu funkcí můžeme nahradit polynomem a dopouštíme se přitom jen malé chyby (Taylorův polynom). Předložený problém budeme nejdříve řešit pro případ, že f je polynom, budeme mu říkat **interpolační polynom**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0. \tag{1}$$

Stupeň polynomu f jsme označili n. Dosazením za x dostáváme rovnice

$$a_n x_i^n + a_{n-1} x_i^{n-1} + \dots + a_0 = f_i\,, \quad i = 0, \dots, m\,. \tag{2}$$

Koeficienty $a_0, \dots, a_n$ jsou tedy řešením soustavy $m+1$ lineárních rovnic o $n+1$ neznámých. Ukážeme, že tato soustava má pro $m = n$ právě jedno řešení.

A. Jednoznačnost. *Jsou-li $a_n, \dots, a_0$ a $a'_n, \dots, a'_0$ dvě řešení soustavy (2), polynom $(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0) - (a'_n x^n + a'_{n-1} x^{n-1} + \dots + a'_0)$ má $n+1$ různých kořenů $x_0, \dots, x_n$. Protože je stupeň polynomu nejvýše n, musí být nulový, a tedy $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = a'_n x^n + a'_{n-1}x^{n-1} + \dots + a'_0$.*

B. Existence. *Úlohu řešíme nejdříve pro $f_j = 1$ a $f_i = 0$, kde $i = 0, \dots, n$, $i \neq j$. Pro každé j má hledaný polynom, označme ho $\overline{f}_j$, kořeny x_i, $i = 0, \dots, n$, $i \neq j$. Je to tedy násobek součinu kořenových činitelů. Hledaný polynom tedy je*

$$\overline{f}_j(x) = \frac{(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}{(x_j - x_0) \cdot \ldots \cdot (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdot \ldots \cdot (x_j - x_n)}\,. \tag{3}$$

Řešením obecné úlohy, kdy budou $f_0, \dots, f_n$ libovolná čísla, bude pak zřejmě polynom

$$f(x) = f_0 \overline{f}_0(x) + \dots + f_n \overline{f}_n(x)\,. \tag{4}$$

Polynomy (3) se nazývají **Lagrangeovy polynomy**, polynom (4) se nazývá **Lagrangeův interpolační polynom**.

Tím, že jsme našli explicitní vyjádření interpolačního polynomu, jsme zároveň dokázali jeho existenci. Ukážeme si ještě další konstrukci interpolačního polynomu pro dané hodnoty $x_0, \dots, x_n, f_0, \dots, f_n$.

Víme, že množina všech polynomů stupně nejvýše n tvoří vektorový prostor s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomů reálným číslem. Jakákoliv množina polynomů $h_i(x)$, $i = 0, \ldots, n$, kde stupeň polynomu h_i je i, $i = 0, \ldots, n$, tvoří (jak se snadno přesvědčíme) jeho bázi. Hledaný interpolační polynom můžeme tedy hledat ve tvaru lineární kombinace

(5)

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})\,.$$

Dosazujeme-li do tohoto polynomu postupně hodnoty $x_0, \ldots, x_n$, dostáváme soustavu lineárních rovnic pro $a_0, \ldots, a_n$

(6)

$$\begin{aligned} f_0 &= a_0 \\ f_1 &= a_0 + a_1(x_1 - x_0) \\ f_2 &= a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ f_n &= a_0 + a_1(x_n - x_0) + \cdots + a_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\cdot\ldots\cdot(x_n - x_{n-1})\,. \end{aligned}$$

Vyřešíme-li tuto soustavu a řešení dosadíme do (5), dostáváme tzv. **Newtonův interpolační polynom**.

Poznámka. *Protože, jak jsme zjistili, je interpolační polynom hodnotami* $x_0, \ldots, x_n$, $f_0, \ldots, f_n$ *určen jednoznačně, je Newtonův interpolační polynom stejný jako Lagrangeův interpolační polynom. Liší se pouze jejich zápisy.*

Uveďme si ještě jejich výhody a nevýhody:

1. **Lagrangeův interpolační polynom**

   Výhoda – explicitní vyjádření bez jakýchkoliv výpočtů.
   Nevýhody – při výpočtu funkční hodnoty v daném bodě provádíme velké množství operací; přidáme-li k hodnotám x_i, f_i, $i = 0, \ldots, n$, další dvojici hodnot x_{n+1}, f_{n+1}, změní se ve vyjádření (4) všechny sčítance.

2. **Newtonův interpolační polynom**

   Nevýhoda – nejdříve je třeba vyřešit soustavu (6) lineárních rovnic.
   Výhoda – soustava (6) má trojúhelníkovou matici a její řešení je tedy snadné. Při výpočtu funkční hodnoty postupujeme analogicky k výpočtu funkční hodnoty polynomu Hornerovým schematem. Rovnost (5) za tím účelem přepíšeme do tvaru

   $$f(x) = a_0 + (x-x_0)(a_1 + (x-x_1)(a_2 + (x-x_2)(a_3 + \cdots + (x-x_{n-1})(a_n))\ldots)\,.$$

   Vidíme, že při výpočtu funkční hodnoty interpolačního polynomu v Lagrangeově tvaru potřebujeme řádově kn^2 základních operací, zatímco u polynomu v Newtonově tvaru pouze $\overline{k}n$. Další výhodou Newtonova polynomu je snadná úprava tvaru (5) přidáme-li další dvojici hodnot x_{n+1}, f_{n+1}. V tom případě přibyde další sčítanec $a_{n+1}(x - x_0)\cdot\ldots\cdot(x - x_n)$. Soustava (6) se přitom rozšíří o jednu rovnici.

Společnou nevýhodou všech interpolačních polynomů je jejich sklon k oscilaci. Např. budou-li čísla x_i mít, po řadě, hodnoty $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5$, a bude-li $f_0 = 1$, $f_1, \dots, f_{10} = 0$, většina lidí by dané body spojila čarou, načrtněte. Přitom interpolační polynom (vyjádřete jej) se od ní podstatně liší.

Můžeme-li volit hodnoty x_i, můžeme uvedený nedostatek odstranit tím, že směrem k okrajům intervalu na němž funkci f zkoumáme, zvolíme čísla x_i s malým rozestupech, tj. ke krajům hodnoty nahustíme.

Jiné řešení dává interpolece spline-funkcí.

Kubická spline-funkce

Funkci f na intervalu $\langle a, b\rangle$ aproximujeme funkcí φ, která je složena z kubických polynomických funkcí definovaných na intervalech $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, $x_0 = a$, $x_n = b$, tj.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_0(x) & = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2 + d_0(x - x_0)^3,\ x \in \langle x_0, x_1\rangle, \\ \varphi_1(x) & = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3,\ x \in \langle x_1, x_2\rangle, \\ & \dots \\ \varphi_{n-1}(x) & = a_{n-1} + b_{n-1}(x - x_{n-1}) + c_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + d_{n-1}(x - x_{n-1})^3, \\ & x \in \langle x_{n-1}, x_n\rangle. \end{cases}$$

Pro polynom φ musíme určit $4n$ koeficientů a_i, b_i, c_i, d_i, $i = 0, 1, \dots, n-1$. K tomu potřebujeme $4n$ podmínek.

Z požadavku spojitosti funkce φ a její 1. a 2. derivace na intervalu $\langle a, b\rangle$

$$\varphi(x_i) = f(x_i)\,,\ i = 0, 1, \dots, n\,, \tag{1}$$

$$\varphi_i(x_{i+1}) = \varphi_{i+1}(x_{i+1})\,,\ i = 0, \dots, n-2\,, \tag{2}$$

$$\varphi_i'(x_{i+1}) = \varphi_{i+1}'(x_{i+1})\,,\ i = 0, \dots, n-2\,, \tag{3}$$

$$\varphi''{}_i(x_{i+1}) = \varphi''{}_{i+1}(x_{i+1})\,,\ i = 0, \dots, n-2 \tag{4}$$

dostaneme $4n - 2$ podmínek. Dvě zbývající podmínky volíme libovolně, nejčastěji jako okrajové podmínky, tj. hodnoty 1. resp. 2. derivací v krajních bodech a, b intervalu.

Hledané koeficienty odvodíme za předpokladu, že známe 2. derivace funkce φ ve všech bodech x_i, $i = 1, \dots, n-1$, označíme je M_i. Nazývají se **momenty spline-funkce**. Máme tedy

$$\boxed{M_i = \varphi''(x_i)\,,\ i = 1, \dots, n-1.} \tag{5}$$

Dále označíme

$$\boxed{h_i = x_{i+1} - x_i\,,\ i = 0, 1, \dots, n-1}$$

a $f(x_i) = y_i$.

Vypočítáme ještě derivace polynomů

$$\varphi_i'(x) = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2,$$
$$\varphi''{}_i(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_i).$$

Nyní z podmínky (1) a předpokladu (5) dostaneme

$$\boxed{a_i = y_i\,,\;\; c_i = \tfrac{1}{2} M_i}$$

Rozepsaná podmínka (4) je

$$2c_i + 6d_i h_i = 2c_{i+1} \implies d_i = \frac{1}{3h_i}(c_{i+1} - c_i).$$

Neboli

$$\boxed{d_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_i}\,.}$$

Poslední koeficienty vypočítáme z podmínky (2), je

$$a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_{i+1}.$$

Odtud

$$\boxed{b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_{i+1} + 2M_i)\,.}$$

Vzorce pro všechny koeficienty jsme odvodili za předpokladu, že známe monenty M_i. Abychom tyto momenty určili, použijeme podmínku (3), z které úpravou dostaneme soustavu $n-1$ rovnic pro $n-1$ neznámých $M_1, \ldots, M_{n-1}$:

$$h_i M_i + 2(h_i + h_{i+1}) M_{i+1} + h_{i+1} M_{i+2} = 6\left(\frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h_{i+1}} - \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}\right).$$

Soustava zapsaná v maticovém tvaru je

$$\begin{pmatrix} 2(h_0+h_1), & h_1, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ h_1, & 2(h_1+h_2), & h_2, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & h_2, & 2(h_2+h_3), & h_2, & \ldots, & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0, & 0, & 0, & 0, & h_{n-2}, & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \ldots \\ M_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= 6 \begin{pmatrix} \frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0} \\ \frac{y_3-y_2}{h_2} - \frac{y_2-y_1}{h_1} \\ \frac{y_4-y_3}{h_3} - \frac{y_3-y_2}{h_2} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{pmatrix}.$$

Matice soustavy je třídiagonální a řeší se Gaussovou eliminační metodou.

Parametrizace křivek polynomy

Tato část doplňuje látku o křivkách o základní informace o křivkách, jejichž souřadnicové funkce jsou polynomy.

Fergusonova kubika

Každou úsečku AB lze popsat bodovou funkcí

$$X(t) = A + t\,\mathbf{u}\,, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

kde $\mathbf{u} = B - A$. Souřadnicové funkce úsečky jsou lineární funkce.

Uvažujme parabolický oblouk s krajními body A, B a tečnými vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ v nich. Souřadnicové funkce paraboly jsou kvadratické funkce. Každou kvadratickou funkci můžeme psát jako lineární kombinaci elementárních polynomů $1, t, t^2$. Potom budeme hledat (v jisté analogii k úsečce) bodovou funkci parabolického oblouku ve tvaru

$$X(t) = A + t\mathbf{u} + t^2\mathbf{v}\,, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle,$$

tj. budeme hledat vyjádření vektorů $\mathbf{v}$ a $\mathbf{v}$ pomocí bodů A, B a vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

Především musí být $X(0) = A$ a $X(1) = B$. Odtud dostáváme jednu podmínku pro hledané vektory: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = B - A$. Derivace bodové funkce X podle t je $X'(t) = \mathbf{u} + 2t\mathbf{v}$. Její hodnota pro $t = 1$ je $\mathbf{a}$ a pro $t = 1$ to je $\mathbf{b}$, tedy

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}\,, \quad \mathbf{u} + 2\mathbf{v} = \mathbf{b} \implies \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Potom rovnice parabolického oblouku je tvaru

$$X(t) = A + \left(t - \frac{t^2}{2}\right)\mathbf{a} + \frac{t^2}{2}\mathbf{b}.$$

Přidáme-li k rovnici pro parabolický oblouk další člen $t^3\mathbf{w}$, bude bodovou funkcí

$$X(t) = A + t\mathbf{u} + t^2\mathbf{v} + t^3\mathbf{w}\,, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$$

určen oblouk kubické křivky, který se nazývá **Fergusonova kubika**, přitom body A, B jsou krajními body oblouku a tečné vektory v nich jsou $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Opět musíme vyjádřit vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ pomocí bodů A, B a vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. Především platí:

$$X(0) = A\,, \quad X(1) = A + \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = B.$$

Odtud dostáváme jednu podmínku pro hledané vektory

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = B - A.$$

Derivace bodové funkce X kubiky podle t je $X'(t) = \mathbf{u} + 2t\mathbf{v} + 3t^2\mathbf{w}$ a její hodnoty v krajních bodech oblouku jsou

$$X'(0) = \mathbf{u} = \mathbf{a}\,, \quad X'(1) = \mathbf{u} + 2\mathbf{v} + 3\mathbf{w} = \mathbf{b}.$$

Potom

$$\mathbf{v} = 3(B-A) - 2\mathbf{a} - \mathbf{b}\,, \quad \mathbf{w} = 2(A-B) + \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Potom bodová funkce Fergusonovy kubiky má tvar

$$X(t) = A(2t^3 - 3t^2 + 1) + B(-2t^3 + 3t^2) + \mathbf{a}(t^3 - 2t^2 + t) + \mathbf{b}(t^3 - t^2).$$

Body A, B určují polohu kubiky. Vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ určují míru vyklenutí kubiky. Pro $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{o}$ je křivka úsečkou AB.

Kubické funkce v bodové rovnici Fergusonovy kubiky se nazývají **Hermitovy polynomy**[1]

Zobecnění Fergusonovy kubiky

Analogicky k předchozímu vezmeme n vektorů $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, potom bodovou funkcí

$$X(t) = A + t\mathbf{a}_1 + t^2\mathbf{a}_2 + \cdots + t^n\mathbf{a}_n\,, \quad t \in \langle 0, 1\rangle$$

je určen oblouk křivky n–tého stupně.

Tuto rovnici můžeme přepsat pomocí matic

$$(x(t)\,,\,,y(t)\,,\,z(t)) = (t^n\,,\,t^{n-1}\,,\,\ldots\,,\,t\,,\,1)\begin{pmatrix} a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & a_{n-1\,3} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Matici $(n+1) \times 3$ můžeme přepsat v součin dvou matic, a to čtvercové matice $\mathbb{B}$, která je $(n+1)$–řádu a matici $\mathbb{G}$ typu $(n+1) \times 3$. Matice $\mathbb{B}$ se nazývá **bázová matice** a matice $\mathbb{G}$ se nazývá **geometrický vektor**. Řádky matice $\mathbb{G}$ jsou určující body a vektory křivky. Význam tohoto zápisu ukážeme pro parabolický oblouk z příkladu 1

$$(x(t)\,,\,y(t)) = (t^2\,,\,t\,,\,1) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

a Fergusonově kubice

$$(x(t)\,,\,y(t)\,,\,z(t)) = (t^3\,,\,t^2\,,\,t\,,\,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

Příčková konstrukce parabolického oblouku

Bodovou rovnici úsečky můžeme psát ve tvaru

$$X(t) = (1-t)A + tB\,, \quad t \in \langle 0, 1\rangle,$$

[1] Chaarles Hermite, 1822 – 1901, fr. matematik, dokázal mj., že číslo e není algebraické, pracoval v oblasti matematické analýzy – Hermitova čísla, Hermitovy formy

tj. jako lineární kombinaci pouze bodů. Analogicky k tomuto vyjádření napíšeme bodovou rovnici parabolického oblouku pomocí krajních bodů A, C oblouku a bodu B, který je společným bodem tečen oblouku v bodech A, B

$$X(t) = (1-t)^2 A + 2t(1-t)B + t^2 C\,, \quad t \in \langle 0, 1\rangle.$$

Dosazením za t 0 a 1 se přesvědčíme, že $X(0) = A, X(1) = C$, tj. body A, C jsou skutečně krajními body oblouku. Derivace bodové funkce X podle parametru t je $X'(t) = -2(1-t)A+2(1-2t)B+2tC$. Potom $X'(0) = 2(B-A)$ a $X'(1) = 2(C-B)$, tedy bod B je průsečíkem tečen parabolického oblouku v krajních bodech A, B.

Upravíme-li dále bodovou rovnici a tečný vektor $X'(t)$ parabolického oblouku na tvar

$$\begin{aligned} X(t) &= (1-t)((1-t)A+tB) + t((1-t)B+tC) = (1-t)K(t) + tL(t),\\ X'(t) &= -2((1-t)A+tB) + 2((1-t)B+tC) = 2(L(t) - K(t)), \end{aligned}$$

dostáváme známou příčkovou konstrukci pro parabolu.

Bézierova kubika

Analogicky k předchozímu uvažujme čtveřici bodů P_0, P_1, P_2, P_3 a utvoříme jejich lineární kombinaci

$$X(t) = \alpha(t)P_0 + \beta(t)P_1 + \gamma(t)P_2 + \delta(t)P_3\,, \quad t \in \langle 0, 1\rangle,$$

kde

$$\alpha(t) + \beta(t) + \gamma(t) + \delta(t) = 1.$$

Všimneme-li si blíže koeficientů v předchozích lineárních kombinacé pro úsečku a parabolu, vidíme, že pokud bychom zvolili koeficienty $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), \delta(t)$ jako členy binomického rozvoje $((1-t)+t)^3$, bude potom jejich součet 1. Funkce

$$B_0(t) = (1-t)^3\,, \quad B_1(t) = 3(1-t)^2 t\,, \quad B_2(t) = 3(1-t)t^2\,, \quad B_3(t) = t^3$$

se nazývají **Bernsteinovy kubické polynomy**. Křivka určená bodovou funkcí

$$X(t) = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3\,, \quad t \in \langle 0, 1\rangle,$$

se nazývá **Bézierova kubika**. V maticovém zápisu má rovnice tvar

$$X(t) = (t^3\,,\, t^2\,,\, t\,,\, 1) \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix},$$

krátce $X(t) = (t^3, t^2, t, 1)\mathbb{B}\mathbb{G}$. Ukážeme si geometrický význam bodů $P_0, \ldots, P_3$: zřejmě $X(0) = P_0$ a $X(1) = P_3$ jsou krajní body oblouku. Derivace bodové funkce X podle t je $X'(t) = (3t^2, 2t, 1, 0)\mathbb{B}\mathbb{G}$ a její hodnoty v krajních bodech intervalu jsou

$$X'(0) = 3(P_1 - P_0)\,, \quad X'(1) = 3(P_3 - P_2).$$

Ukážeme si ještě konstrukci dalších bodů kubiky. Proto její rovnici upravíme:

$X(t) = [(1-t)P_0 + tP_1](1-t)^2 + 2[(1-t)P_1 + tP_2](1-t)t + [(1-t)P_2 + tP_3]t^2,$

$X(t) = [(1-t)Q_0 + tQ_1](1-t) + [(1-t)Q_1 + tQ_2]t,$

$X(t) = (1-t)R_0 + tR_1.$

kde jsme označili

$$Q_0 = (1-t)P_0 + tP_1\,, \quad Q_1 = (1-t)P_1 + tP_2\,, \quad Q_2 = (1-t)P_2 + tP_3\,,$$
$$R_0 = (1-t)Q_0 + tQ_1\,, \quad R_1 = (1-t)Q_1 + tQ_2.$$

Výsledek shrneme v algoritmus, který se nazývá **algoritmus De Casteljau**: pro libovolné $t \in \langle 0, 1\rangle$ existují

1. body Q_0, Q_1, Q_2 po řadě na úsečkách P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3,
2. body R_0, R_1 po řadě na úsečkách Q_0Q_1, Q_1Q_2,
3. bod $X(t)$ je na úsečce R_0R_1.

Volba řídicího polygonu $P_0P_1P_2P_3$ mění tvar křivky.

Coonsova kubika

Při volbě funkcí $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, z předchozího příkladu, ve tvaru

$$\alpha(t) = \frac{1}{6}(1-t)^3\,,\ \beta(t) = \frac{1}{6}(4-6t^2+3t^3)\,,\ \gamma(t) = \frac{1}{6}(1+3t+3t^2-3t^3)\,,\ \delta(t) = \frac{1}{6}t^3,$$

dostáváme **Coonsovu kubiku**

$$X(t) = \frac{1}{6}(t^3\,,\,t^2\,,\,t\,,\,1)\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}.$$

Hodnota funkce X pro $t = 0$ a $t = 1$ je

$$X(0) = \frac{1}{6}(P_0 + 4P_1 + P_2)\,, \quad X(1) = \frac{1}{6}(P_1 + P_2 + P_3).$$

Coonsova kubika neprochází žádným z bodů $P_0, \ldots, P_3$. Vyjádření bodu $X(0)$ upravíme

$$X(0) = \frac{1}{3}\frac{P_0 + P_2}{2} + \frac{2}{3} = P_1\frac{1}{3}S + \frac{2}{3}P_1,$$

kde jsme S označili střed dvojice bodů P_0P_2. Odtud dostáváme

$$X(0) - S = \frac{2}{3}(P_1 - S).$$

Tedy počáteční bod kubiky je v antitěžišti trojúhelníku $P_0P_1P_2$. Analogicky bychom ukázali, že koncový bod $X(1)$ kubiky je antitěžiště trojúhelníku $P_1P_2P_3$. Koncové body oblouku kubiky leží v trojúhelnících, které mají jednu stranu společnou, ta je určena vnitřními body řídicího polygonu. Zřejmě pokud budeme chtít na daný oblouk napojit další oblouk, zřejmě stačí přidat další bod P_4.

Ještě vypočteme tečné vektory v krajních bodech oblouku kubiky. Derivace bodové bunkce X je $\dot{X}(t) = \frac{1}{6}(3t^2, 2t, 1, 0)\mathbb{BG}$. Potom

$$X'(0) = \frac{1}{2}(P_2 - P_0)\,, \quad X'(1) = \frac{1}{2}(P_3 - P_1).$$