STUDIJNÍ TEXT PRO OBOR G+K
KATEDRA MATEMATIKY
FAKULTA STAVEBNÍ
ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ

FUNKČNÍ ŘADY

Doc. RNDr. Milada Kočandrlová, CSc.

2005

Úvod

Posloupnost reálných čísel je pravidlo, které každému přirozenému číslu přiřadí nějaké reálné číslo. Přesněji řečeno, je to zobrazení množiny $\mathbb{N}$ přirozených čísel do množiny $\mathbb{R}$ všech reálných čísel. Analogicky můžeme definovat i posloupnosti jiných matematických objektů. Jestliže každému $n \in \mathbb{N}$ přiřadíme bod, dostáváme posloupnost bodů, přiřadíme-li mu reálnou funkci, dostáváme **posloupnost reálných funkcí**.

U posloupností funkcí budeme předpokládat, že všechny funkce v posloupnosti mají stejný definiční obor $\mathbb{D}$, $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$. Posloupnost funkcí $f_1, f_2, f_3, \dots$ obvykle zapisujeme jako jsme zapisovali posloupnosti reálných čísel, tj. $\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$, nebo $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$, nebo jenom $\{f_n\}$. Tudíž je-li $\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$ posloupnost funkcí s definičním oborem $\mathbb{D}$, dostaneme pro každé $x \in \mathbb{D}$ posloupnost reálných čísel $\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots\}$. Má-li pro $x \in \mathbb{D}$ tato posloupnost limitu $f(x)$, píšeme

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x),$$

nebo jenom $f(x) = \lim f_n(x)$. Říkáme, že **posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje v bodě x**. Jestliže konverguje pro každé $x \in \mathbb{D}$, říkáme, že má za limitu funkci f nebo, že **posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje k funkci f**.

Je-li na množině $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$ definována funkce f a posloupnost funkcí $\{f_n\}$, říkáme, že **posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně k funkci f**, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n > n_0$ leží graf funkce f_n v ε-okolí (ε-pásu, křivočarý pás ohraničují funkce $f + \varepsilon$ a $f - \varepsilon$) grafu funkce f.

Funkční řadou nazveme posloupnost funkcí zapsanou ve tvaru symbolického součtu

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots,$$

nebo také

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

Funkci

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$$

nazýváme **n-tým částečným součtem funkční řady**. Pokud existuje vlastní limita

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} S_n(x)$$

posloupnosti $S_1(x), S_2(x), \dots$ částečných součtů, nazýváme ji **součtem funkční řady**, píšeme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

a říkáme, že **funkční řada konverguje v bodě** x a má součet $f(x)$. Je-li tato limita nevlastní, říkáme, že **řada diverguje**. I v případě, že limita posloupnosti n-tých částečných součtů neexistuje, říkáme, že řada diverguje, nebo také říkáme, že řada osciluje. Množina všech x, pro které funkční řada konverguje, se nazývá **obor konvergence**.

Jestliže posloupnost částečných součtů konverguje na $\mathbb{D}$ stejnoměrně k funkci f, říkáme, že **funkční řada konverguje stejnoměrně k funkci f**.

Příklad 1. Geometrická řada. *Řada*

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \tag{1}$$

je geometrická řada, $x \neq 0$ se nazývá kvocient geometrické řady. K řadě (1) napíšeme součet prvních n členů

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}. \tag{2}$$

Je-li $x = 1$, je $S_n(1) = n$ posloupnost s nevlastní limitou, řada diverguje.

Pro $x = -1$ je $S_n(-1) = (-1)^n$ pro n sudé rovno 1 a pro n liché je rovno -1. Tedy limita posloupnosti $\{S_n(-1)\}$ neexistuje, řada osciluje.

Pro $|x| \neq 1$ od součtu (2) odečteme jeho x-násobek (pro $x \neq 0$), potom

$$S_n(x) - xS_n(x) = 1 - x^n \implies S_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

Protože

$$\lim x^n \begin{cases} = 0, & \text{pro } |x| < 1, \\ = +\infty, & \text{pro } x > 1, \\ \text{neexistuje}, & \text{pro } x < -1, \end{cases}$$

pro $|x| < 1$ má posloupnost $\{S_n(x)\}$ limitu

$$\lim_{n \to +\infty} S_n(x) = \frac{1}{1 - x}. \tag{3}$$

Konečná limita posloupnosti n-tých částečných součtů (2) geometrické řady je jejím součtem. Píšeme

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n\,,\ |x| < 1. \tag{4}$$

Graf funkce z (3) je částí rovnoosé hyperboly pro $|x| < 1$.

Příklad 2. Taylorova řada. *Má-li funkce f v okolí bodu $a \in \mathbb{D}_f$ spojité derivace všech řádů, potom Taylorův polynom*

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

rozšíříme na funkční řadu

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n, \tag{5}$$

kterou nazýváme **Taylorova řada** *funkce f v bodě a.*

Taylorova řada je speciálním případem řady

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \ldots,$$

která se nazývá **mocninná řada se středem** x_0.

Geometrická řada (4) je Taylorovou řadou funkce $f(x) = (1-x)^{-1}$. *Funkce má v okolí bodu 0 pro každé* $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, *derivaci*

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\,,\ f^{(n)}(0) = n!,$$

přitom definujeme $0! = 1$. *Dosazením do vzorce (5) dostaneme řadu (4).*

Komplexní funkce

V některých úvahách je výhodné použít komplexní čísla a komplexní funkci. Množinu všech komplexních čísel budeme značit $\mathbb{C}$. Komplexní funkci komplexní proměnné můžeme definovat analogicky k postupu, kterým jsme definovali reálnou funkci. Proto výklad může být stručný. Podrobněji se lze s komplexními funkcemi komplexní proměnné seznámit v doporučené literatuře, např. [1].

Základní pojmy a tvrzení

Komplexní funkce komplexní proměnné je zobrazení z množiny $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ do množiny $\mathbb{C}$. Pro komplexní funkce f, g definujeme jejich součet a součin

$$(f+g)(z) = f(z) + g(z)\,,\ (f \cdot g)(z) = f(z) \cdot g(z).$$

Zavedeme-li pojem ϵ-ového okolí komplexního čísla z_0 jako množinu $\{z \in \mathbb{C}; |z-z_0| < \epsilon\}$, můžeme stejně jako u reálných funkcí definovat limitu, spojitost funkce, posloupnost funkcí a její limitu, funkční řadu a její součet. Nejpoužívanější jsou mocninné řady, proto jim věnujeme největší pozornost.

Mocninná řada o středu z_0 bude výraz

$$a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \ldots,$$

kde $a_0, a_1, \ldots$ jsou komplexní čísla. Množinu všech mocninných řad o středu z_0 označíme $\mathcal{M}_0$. I když konvergenci řady zavedeme později, budeme definovat operace mezi řadami o daném středu. Přitom postupujeme jako při operacích mezi mnohočleny. Máme-li dány dvě mocninné řady (zřejmě bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $z_0 = 0$)

$$A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\,,\ B(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Definujeme operace sčítání a násobení mocninných řad

$$(A+B)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n\,,$$
$$(A \cdot B)(z) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + \ldots.$$

Snadno se můžeme přesvědčit, že zavedené operace jsou asociativní a komutativní:

1) $A, B, C \in \mathcal{M}_0 \implies (A+B)+C = A+(B+C)\,,\ (AB)C = A(BC),$
2) $A, B \in \mathcal{M}_0 \implies A+B = B+A\,,\ AB = BA,$
3) $a_i = 0\,,\ i = 0, 1, \cdots \implies A+B = B\,,$
   $a_0 = 1\,,\ a_i = 0\,,\ i = 1, 2, \cdots \implies AB = B.$

Budeme-li pracovat s konvergentními řadami, které tedy představují nějakou funkci, bude nutné ze dvou funkcí sestrojit i funkci složenou. Nechť tedy

$$t = A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \,, \; u = B(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n .$$

Složenou funkci $u = B(A(z))$, ve tvaru řady, dostaneme postupným výpočtem. Pomocí zavedených operací sčítání a násobení řad dostaneme

$$\begin{aligned} t^2 &= a_0^2 + 2a_0a_1z + (2a_0a_2 + a_1^2)z^2 + 2(a_0a_3 + a_1a_2)z^3 + \dots, \\ t^3 &= a_0^3 + 3a_0^2a_1z + 3a_0(a_0a_2 + a_1^2)z^2 + (2a_0^2a_3 + 6a_0a_1a_2 + a_1^3)z^3 + \dots, \\ &\text{atd.} \end{aligned}$$

Dosadíme-li do řady B vypočítané mocniny t, dostaneme

$$\begin{aligned} B(A(z)) &= b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots \\ &= b_0 + b_1(a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots)+ \\ &+ b_2(a_0^2 + 2a_0a_1z + (2a_0a_2 + a_1^2)z^2 + 2(a_0a_3 + a_1a_2)z^3 + \dots) + \dots . \end{aligned}$$

Dostáváme výslednou složenou funkci, ovšem jen tehdy, jestliže budou použité řady konvergentní.

V geodetických výpočtech se setkáme s aproximací funkce sekans $y = 1/\cos x$. Známe-li řadu $A(z)$, $a_0 \neq 0$, můžeme její převrácenou hodnotu sestrojit pomocí geometrické řady následujícím způsobem

$$\frac{1}{A(z)} = \frac{1}{a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots} = \frac{1}{a_0} \frac{1}{1 + \frac{a_1}{a_0}z + \frac{a_2}{a_0}z^2 + \dots}.$$

Je-li $q = |\frac{a_1}{a_0}z + \frac{a_2}{a_0}z^2 + \dots| < 1$, můžeme na převrácenou hodnotu řady $A(z)$ pohlížet jako na součet geometrické řady s kvocientem q a psát

$$\frac{1}{A(z)} = \frac{1}{a_0}\left(1 - \left(\frac{a_1}{a_0}z + \frac{a_2}{a_0}z^2 + \dots\right) + \left(\frac{a_1}{a_0}z + \frac{a_2}{a_0}z^2 + \dots\right)^2 + \dots\right).$$

V praxi často musíme řešit rovnice, které obvyklými metodami řešit neumíme. Někdy tyto rovnice můžeme přibližně řešit tak, že funkce, které v nich vystupují vyjádříme pomocí konvergentních řad a řešíme úlohu tak, že každou funkci nahradíme několika prvními členy příslušné řady. Na závěr bychom ovšem měli udělat odhad chyby řešení (což se ne vždy děje).

Několik tvrzení

I. Každé reálné číslo je i číslem komplexním, a tudíž každá reálná mocninná řada je zároveň komplexní řadou.

II. Jestliže komplexní, a tedy i reálná mocninná řada se středem z_0 konverguje v bodě $z_1 \in \mathbb{C}$, konverguje tato řada pro každé $z \in \mathbb{C}$, pro které je $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, tj. konverguje uvnitř kruhu o středu z_0 a poloměru $|z_1 - z_0|$.

III. Jestliže reálnou funkci můžeme rozvinout do konvergentní mocninné řady, tak komplexní funkci, která je vyjádřena touto řadou v $\mathbb{C}$ označujeme stejným symbolem. Např. značíme e^z, $\sin z$, $\cos z$ funkce v $\mathbb{C}$ definované jako řady.

Konvergence řady

V praktických úlohách obvykle součet konvergentní nekonečné řady aproximujeme jejím částečným součtem. Funkční řadu $\{f_n\}$ můžeme zapsat ve tvaru

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = S_n(x) + R_{n+1}(x), \tag{6}$$

kde $S_n(x)$ je n-tý částečný součet a $R_{n+1}(x)$ **zbytek po n-tém členu** řady. Tak dostáváme posloupnost n-tých částečných součtů a posloupnost zbytků po n-tém členu řady. Jestliže v bodě x existuje vlastní limita

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x),$$

řada (6) **konverguje v bodě** x a má součet $f(x)$.

Z (6) je zřejmé, že

$$\lim_{n\to+\infty} (S_n(x) - f(x)) = 0.$$

Můžeme proto říci, že řada (6) konverguje a má součet $f(x)$, jestliže limita posloupnosti zbytků po n-tém členu řady je nula, tj.

$$\lim_{n\to+\infty} R_{n+1}(x) = 0.$$

V tomto případě dále zřejmě platí

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} (S_n(x) - S_{n-1}(x)) = f(x) - f(x) = 0. \tag{7}$$

Podmínka $\lim f_n(x) = 0$ (viz (7)) je **nutnou podmínkou konvergence řady**.

Příklad 3. Harmonická řada. *Řada*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

se nazývá harmonická řada. Splňuje nutnou podmínku konvergence, limita jejího n-tého členu je nula. Ukážeme, že posloupnost jejích n-tých částečných součtů je neomezená, a tedy **harmonická řada diverguje**. *K tomu využijeme nerovnost* $\ln(1+x) \le x$ *(graf funkce* $\ln(1+x)$ *leží pod tečnou v bodě 0). Postupně vypočítáme*

$$\begin{aligned}
s_n &\ge \ln(1+1) + \ln(1+\frac{1}{2}) + \ln(1+\frac{1}{3}) + \cdots + \ln(1+\frac{1}{n}),\\
s_n &\ge \ln 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{m+1}{n},\\
s_n &\ge \ln(n+1).
\end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$\lim_{n\to+\infty} s_n \geq \lim_{n\to+\infty} \ln(n+1),$$

a tedy

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty.$$

Harmonická řada je tudíž divergentní.

Kritéria konvergence řady

Pro zjišťování konvergence řady s reálnými členy se většinou nevychází z definice, ale využívají se tzv. kritéria konvergence. Uvedeme si tři z nich. Přitom si označíme $\sum A_n$, $\sum B_n$ funkční řady s definičním oborem $\mathbb{D}$.

Srovnávací kritérium.

Jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $0 \leq A_n \leq B_n$, potom

– je-li řada $\sum B_n$ konvergentní, je i řada $\sum A_n$ konvergentní,

– je-li řada $\sum A_n$ divergentní, je i řada $\sum B_n$ divergentní.

Abychom mohli používat srovnávací kritérium musíme znát řady, které konvergují, a také řady, které divergují. Těmi jsou často řady geometrické, viz příklad 1, řada harmonická i následující řada.

Příklad 4. *Konvergenci řady*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

dokážeme srovnáním s řadou

$$\sum A_n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}.$$

Nejdříve, ale musíme ukázat, že tato řada také konverguje. Její n-tý člen rozložíme na součet parciálních zlomků

$$A_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Potom pro n-tý částečný součet řady platí

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Limita posloupnosti n-tých částečných součtů je 1. Řada $\sum A_n$ tedy konverguje a má součet 1.

Zřejmě $n(n-1) < nn$ pro každé $n \geq 1$, a tedy podle srovnávacího kritéria řada $\sum \frac{1}{n^2}$ konverguje.

Podílové kritérium.

Jestliže existuje q, $0 < q < 1$, *tak, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *je* $A_n > 0$ *a*

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} \leq q < 1, \tag{8}$$

řada $\sum A_n$ *konverguje.*

Jestliže ke každému $n_0 \in \mathbb{N}$ *existuje* $n > n_0$ *tak, že*

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} \geq 1,$$

řada $\sum A_n$ *diverguje.*

Často se podílové kritérium používá v **limitním tvaru***: Existuje-li limita*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = q,$$

potom pro $q < 1$ *řada* $\sum A_n$ *konverguje a pro* $q > 1$ *řada* $\sum A_n$ *diverguje.*

Odmocninové kritérium.

Jestliže existuje q, $0 < q < 1$, *tak, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *je* $A_n \geq 0$ *a*

$$\sqrt[n]{A_n} \leq q < 1, \tag{9}$$

řada $\sum A_n$ *konverguje.*

Jestliže ke každému $n_0 \in \mathbb{N}$ *existuje* $n > n_0$ *tak, že*

$$\sqrt[n]{A_n} \geq 1,$$

řada $\sum A_n$ *diverguje.*

I odmocninové kritérium se často používá v **limitním tvaru***: Existuje-li limita*

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{A_n} = q,$$

potom pro $q < 1$ *řada* $\sum A_n$ *konverguje a pro* $q > 1$ *řada* $\sum A_n$ *diverguje.*

Jestliže konverguje řada $\sum |A_n|$, říkáme, že řada $\sum A_n$ **konverguje absolutně**. Ukážeme, že jestli řada $\sum A_n$ konverguje absolutně, tak konverguje.

Označíme $A_n^+ = \max(A_n, 0)$, $A_n^- = \max(-A_n, 0)$. Potom zřejmě je $A_n = A_n^+ - A_n^-$, $0 \leq A_n^+ \leq |A_n|$, $0 \leq -A_n^- \leq |A_n|$. Podle srovnávacího kritéria jsou řady $\sum A_n^+$, $\sum A_n^-$ konvergentní, a tudíž je konvergentní i řada $\sum A_n$.

Potom i na řady, u jejíchž členů se střídá znaménko, tj. řady **alternující**, můžeme použít vyslovená kritéria.

Příklad 5. *Funkce $f(x) = e^x$ má pro každé x derivace všech řádů, a to $f^{(n)}(x) = e^x$. Její Taylorova řada v bodě 0 podle (5) je*

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{10}$$

Provedeme-li v (10) substituci $x := -x$, dostaneme Taylorovu řadu funkce $g(x) = e^{-x}$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}. \tag{11}$$

Podle podílového kritéria snadno ověříme konvergenci obou Taylorových řad (10) a (11)

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \left| \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1}.$$

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ je

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1.$$

Potom obě řady (10) a (11) absolutně konvergují a můžeme je sečíst i odečíst. Dostaneme řady hyperbolických funkcí

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$
$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n+1)!}.$$

Snadno se přesvědčíme, že jsou to Taylorovy řady těchto funkcí v bodě nula.

Abychom se opět, pro určení Taylorovy řady, vyhnuli derivování funkcí, použijeme komplexní funkci a vlastnosti komplexních čísel.

Provedeme-li v (10) substituci : $x = ix$, kde i je imaginární jednotka, pro kterou je $i^{2n} = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ a $i^{2n+1} = (-1)^n i$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, potom

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{12}$$

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ vyjádříme komplexní číslo e^{ix} v goniometrickém tvaru

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \tag{13}$$

Porovnáme-li reálnou a imaginární část komplexních čísel ve (12) a (13), dostaneme funkční řady

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \ \sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \ x \in \mathbb{R}, \tag{14}$$

které jsou Taylorovými řadami funkcí kosinus a sinus.

Příklad 6. *Funkce* $f(x) = \ln(1+x)$ *má v okolí 0 derivaci* n*-tého řádu,* $n \geq 1$*,*

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \ f^n(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

Její Taylorova řada v počátku je

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \ |x| < 1. \tag{15}$$

Provedeme-li v (15) substituci $x := -x$*, dostaneme Taylorovu řadu funkce* $g(x) = \ln(1-x)$*, tj.*

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}, \ |x| < 1. \tag{16}$$

Že řady (15) a (16) konvergují ověříme podle odmocninového kritéria. Je

$$\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n}} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}} \text{ a } \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n} = 1 \implies \lim_{n\to+\infty}\frac{|x|}{\sqrt[n]{n}} < 1$$

pro každé $x \in (-1,1)$*. Rozdílem obou řad dostaneme Taylorovu řadu*

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

Příklad 7. Binomická řada *je Taylorova řada mocninné funkce* $f(x) = (1+x)^m$*,* $m \in \mathbb{R}$*. Její* k*-tá derivace je*

$$f^{(k)}(x) = m(m-1)\dots(m-k+1)(1+x)^{m-k}, \ f^{(k)}(0) = m(m-1)\dots(m-k+1).$$

Dosazením derivací do vzorce (5) dostaneme binomickou řadu

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{m}{k}x^k, \ |x| < 1. \tag{17}$$

Že řada (17) konverguje ověříme limitním podílovým kritériem. Je

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{|m(m-1)\dots(m-k)|}{(k+1)!}\frac{k!}{|m(m-1)\dots(m-k+1)|}|x| = \lim_{k\to+\infty}\frac{|m-k|}{k+1}|x| = |x|.$$

Pro každé $|x| < 1$ *řada (17) konverguje.*

Stejnoměrná konvergence řady

Definice stejnoměrně konvergentní řady se obvykle uvádí v následujícím tvaru (dokažte, že ekvivalentním s tím, který jsme uvedli v úvodu):

Říkáme, že funkční řada

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \tag{18}$$

na intervalu $\mathbb{D}$ stejnoměrně konverguje k funkci $f(x)$, jestliže k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ a každé $x \in \mathbb{D}$ je

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Pro určení stejnoměrné konvergence řady využíváme

Weierstrassovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci řady.
Nechť pro $x \in \mathbb{J}$ platí (18). Jestliže $|f_n(x)| \leq a_n$ pro každé $x \in \mathbb{J}$, $n \in \mathbb{N}$, a číselná řada $\sum a_n$ konverguje, potom řada (18) konverguje stejnoměrně na $\mathbb{J}$.

Se stejnoměrně konvergentními řadami můžeme pracovat jako s konečnými součty.

Spojitost součtu stejnoměrně konvergentní řady.
Je-li řada (18) stejnoměrně konvergentní na $\mathbb{J}$ a všechny funkce f_n jsou na $\mathbb{J}$ spojité, potom i funkce f je na $\mathbb{J}$ spojitá.

Derivace stejnoměrně konvergentní řady.
Jestliže všechny funkce f_n mají spojitou derivaci na $\mathbb{J}$, řada (18) a řada derivací f_n' je na $\mathbb{J}$ stejnoměrně konvergentní, potom

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x).$$

Integrál stejnoměrně konvergentní řady.
Jestliže řada (18) stejnoměrně konverguje na (a,b) a funkce f_n jsou na (a,b) spojité, potom pro každé $\alpha, \beta \in (a,b)$ je

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_\alpha^\beta f_n(x)\,dx.$$

Příklad 8. *Pro $|x| < 1$ je funkce $f(x) = 1/(1+x^2)$ součtem geometrické řady s kvocientem $q = -x^2$, tj.*

$$\frac{1}{x^2+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}.$$

Pro $|x| < 1$ je řada stejnoměrně konvergentní, proto ji můžeme integrovat

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Pro $|x| < 1$ má aproximace $\operatorname{arctg} x \doteq x$ chybu (podle Lagrangeova tvaru zbytku) $|R_2| = \frac{|x|^3}{3} < 0.3$.

Příklad 9. *Funkci z příkladu 8 můžeme upravit na tvar*

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}},$$

a pak ji můžeme chápat jako součet geometrické řady s kvocientem $q = -1/x^2$. Tj. pro $|x| > 1$ řada

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{x^{2n}} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{x^{2n}},$$

stejnoměrně konverguje a můžeme ji integrovat. Potom

$$\int_x^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\int_x^{+\infty}\frac{1}{t^{2n}}dt$$

$$\lim_{t\to+\infty} \operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg} x = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\Big[-\frac{1}{(2n-1)t^{2n-1}}\Big]_x^{+\infty}$$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(2n-1)x^{2n-1}}.$$

V geofyzice při použití elipsoidálních souřadnic se setkáme s aproximací funkce arkustangens ve tvaru

$$\operatorname{arctg}\frac{E}{u} \backsim \frac{E}{u} + R_2\left(\frac{E^3}{u^3}\right),$$

kde E je konstantní lineární excentricita a u proměnná velikost vedlejší poloosy elipsoidů. Pro velká u je elipsoid nahrazován koulí. Abychom dostali tento vzorec, vraťme se k upravené derivaci funkce arkustangens:

$$\frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{x^{2n}}.$$

Geometrickou řadu budeme integrovat tak, že na levé straně použijeme substituci $u = 1/t$:

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{t^2}}\frac{dt}{t^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\int_x^{+\infty}\frac{1}{t^{2n}}dt$$

$$-\int_{\frac{1}{x}}^{0}\frac{du}{1+u^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\Big[-\frac{1}{(2n-1)t^{2n-1}}\Big]_x^{+\infty}$$

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)x^{2n-1}}.$$

Chyba aproximace prvním členem řady je podle Lagrangeova tvaru zbytku menší než druhý člen řady.

Řadu z příkladu 9 bychom dostali i použitím vzorců (19).

Funkční řada

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{x^n} = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots + \frac{c_n}{x^n} + \ldots,$$

kde $c_i \in \mathbb{R}$, která nemusí konvergovat pro žádné x, se nazývá **asymptotický rozvoj** nějaké funkce f, pro ta $x \in \mathbb{R}$, pro která platí

$$\lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - \left(c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots + \frac{c_n}{x^n} \right) \right] x^n = 0,$$

pro každé $n = 0, 1, \ldots,$ píšeme

$$f(x) \backsim \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{x^n}.$$

Potom je

$$\begin{aligned} c_0 &= \lim_{x\to+\infty} f(x), \\ c_1 &= \lim_{x\to+\infty} (f(x) - c_0)x, \ldots, \\ c_{n+1} &= \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - c_0 - \frac{c_1}{x} - \cdots - \frac{c_n}{x^n} \right) x^{n+1}. \end{aligned} \tag{19}$$

Příklad 10. Laplaceův-Gaussův integrál. *Substitucí $x := -x^2$ v řadě (10) dostaneme mocninnou řadu*

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!},$$

která je stejnoměrně konvergentní na celém $\mathbb{R}$. Můžeme ji tudíž integrovat. Potom

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{n!} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}. \tag{20}$$

Pro zbytek po n-tém členu platí

$$|R_{n+1}| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{n!(2n+1)}.$$

Např.

$$F(\frac{1}{3}) \doteq \frac{1}{3} - \frac{1}{3^3 3} \doteq 0.320987654, \quad |R_3| \leq 0.0004115226337.$$

Pro velká x řada (20) konverguje pomalu, např. již pro $x = 2$ bychom potřebovali 13 členů řady (20), aby chyba aproximace byla na čtvrtém desetinném místě. Proto najdeme jiné vyjádření Laplaceova integrálu, pomocí asymptotického rozvoje. V integrálu *použijeme n-krát metodu per partes*

$$\begin{aligned}
\int_x^{+\infty} \frac{1}{2t} e^{-t^2} 2t\, dt &= \left[-\frac{1}{2t} e^{-t^2}\right]_x^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{-t^2} dt = \\
&= \frac{1}{2x} e^{-x^2} - \frac{1}{2}\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{-t^2} dt \qquad (21)\\
\int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^3} e^{-t^2} 2t dt &= \frac{1}{2x^3} e^{-x^2} - \frac{3}{2}\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^4} e^{-t^2} dt \\
\int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^5} e^{-t^2} 2t dt &= \frac{1}{2x^5} e^{-x^2} - \frac{5}{2}\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^6} e^{-t^2} dt.
\end{aligned}$$

Postupným dosazením zdola nahoru dostaneme pro první tři aplikace metody per partes, kde jsme derivovali funkci $u = 1/x^n$ a integrovali funkci $v' = e^{-t^2}2t$,

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2x} e^{-x^2} - \frac{1}{2^2 x^3} e^{-x^2} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 x^5} e^{-x^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3} \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^6} e^{-t^2} dt.$$

Odtud odhadneme n-tý člen a zbytek po n-tém členu a integrál zapíšeme ve tvaru

$$\begin{aligned}
\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2x} e^{-x^2} \Bigg(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2x^2)^3} + \dots \\
+ (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{(2x^2)^{n-1}}\Bigg) + R_{n+1}(x), \qquad (22)
\end{aligned}$$

kde

$$R_{n+1}(x) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n} \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}} e^{-t^2} dt.$$

Podle integrálů ve (21) je zřejmé, že

$$\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^{2n}} e^{-t^2} dt = \int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^{2n+1}} 2te^{-t^2} dt \leq \frac{1}{2x^{2n+1}} e^{-x^2}.$$

Potom

$$|R_{n+1}(x)| < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^{n+1} x^{2n+1}} e^{-x^2}.$$

Odtud je vidět, že vezmeme-li prvních n členů řady (22), je absolutní hodnota chyby menší než absolutní hodnota následujícího členu. Např. pro $x = 5$ a $n = 2$ je chyba menší než $1.6 \cdot 10^{-15}$, což je prakticky nula. Přitom podle podílového kritéria řada (22) diverguje (ověřte).

Příklad 11. Vytvořující funkce pro Fibonacciho posloupnost. *Fibonacciho posloupnost se nazývá posloupnost určená rekurentním vzorcem*

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\,, \;\; a_0 = 0\,, \;\; a_1 = 1. \qquad (23)$$

Nechť posloupnost (23) je posloupností koeficientů mocninné řady. Předpokládejme, že existuje funkce f, která je součtem této řady. Potom můžeme psát

$$f(x) = x + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n, \tag{24}$$

neboli po dosazení z definice (23)

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \sum_{n=2}^{+\infty}(a_{n-1} + a_{n-2})x^n = x + x\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1}x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}x^{n-2} \\ &= x + x\left(x + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n\right) + x^2\left(x + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n\right). \end{aligned} \tag{25}$$

Dosazením (24) do (25) dostaneme

$$f(x) = x + xf(x) + x^2 f(x). \tag{26}$$

Odtud vypočítáme

$$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}. \tag{27}$$

Funkce (27) se nazývá vytvořující funkce posloupnosti (23). Rozložíme ji na součet parciálních zlomků. Kořeny jmenovatele jsou

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \ \alpha_2 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Potom

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{-\alpha_1}{x-\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{x-\alpha_2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{\alpha_1}} - \frac{1}{1-\frac{x}{\alpha_2}}\right). \tag{28}$$

Ve (28) je první parciální zlomek součtem geometrické řady s kvocientem x/α_1 a druhý zlomek součtem geometrické řady s kvocientem x/α_2, tj.

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x-x^2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{\alpha_1}\right)^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{\alpha_2}\right)^n\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\sqrt{5}+1)^n}{2^n}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(\sqrt{5}-1)^n}{2^n}x^n\right). \end{aligned} \tag{29}$$

Řada (29) konverguje pro každé $x \in (-\alpha_1, \alpha_1)$.

Příklad 12. Besselova diferenciální rovnice, Besselovy funkce. *Hledejme řešení Besselovy diferenciální rovnice*

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0, \tag{30}$$

kde n je celé nezáporné, ve tvaru nekonečné mocninné řady, která stejnoměrně konverguje na $(-1,1)$. Potom je-li

$$\begin{aligned} y &= x^p \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \text{, je} \\ y' &= px^{p-1} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k + x^p \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}, \\ y'' &= p(p-1)x^{p-2} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k + 2px^{p-1} \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1} + x^p \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}. \end{aligned} \tag{31}$$

Dosazením z (31) do rovnice (30) dostaneme

$$(p(p-1)+p+x^2-n^2)x^p \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k + (2p+1)x^{p+1} \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1} + x^{p+2} \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = 0.$$

Abychom určili koeficienty a_i řady z (31), najdeme koeficienty u mocniny x^p, tj.

$$(p(p-1) + p - n^2)a_0 = p^2 - n^2 = 0.$$

Pro $a_0 \neq 0$ je $p = n$.

Z koeficientů u mocniny x^{p+1} určíme a_1. Je

$$(p(p-1) + 2p + p + 1 - n^2)a_1 = 0 \implies (2n+1)a_1 = 0 \implies a_1 = 0. \tag{32}$$

Rekurentní vzorec pro a_k dostaneme z koeficientů u mocniny x^{p+k}. Je

$$(p(p-1) + 2pk + k(k-1) + p + k - n^2)a_k + a_{k-2} = 0 \implies (2n+k)ka_k + a_{k-2} = 0,$$

odtud substitucí $k := k+2$ dostaneme rekurentní vzorec

$$(k+2)(2n+k+2)a_{k+2} + a_k = 0 \tag{33}$$

s $a_1 = 0$ podle (32). Ještě zvolíme $a_0 = \dfrac{1}{2^n n!}$. Potom řešení Besselovy rovnice (30) má tvar

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!}\left(1 - \frac{x^2}{2^2(n+1)} + \frac{x^4}{2^4 2!(n+1)(n+2)} - \dots\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}. \tag{34}$$

Funkce (34) se nazývá **cylindrická funkce**, *nebo* **Besselova funkce 1. druhu**.
Pro $n = 0$, tj. **Besselova funkce nultého řádu** *je*

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} - \frac{x^6}{2^6(3!)^2} + \dots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} + \dots.$$

Pro $n = 1$, tj. **Besselova funkce prvního řádu** *je*

$$J_1(x) = \frac{x}{2}\left(1 - \frac{x^2}{2^2 2!} + \frac{x^4}{2^4 2! 3!} - \frac{x^6}{2^6 3! 4!} + \dots\right).$$

Besselovy funkce využijeme při studiu parametrů Keplerovského pohybu planet.

Příklad 13. *Poloměr referenční koule se volí také tak, aby povrch této koule a povrch referenčního elipsoidu byly stejné. Povrch elipsoidu, který je určen rovnicí*

$$X(\lambda, \beta) = [a\cos\lambda\cos\beta, a\sin\lambda\cos\beta, b\sin\beta],$$

kde β je redukovaná šířka, je

$$S_e = a\int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\beta\sqrt{a^2\sin^2\beta + b^2\cos^2\beta}\,d\beta. \tag{35}$$

Substitucí $tg\beta = \frac{b}{a} tg\varphi$, kde φ je zeměpisná šířka, převedeme integrál (35) na tvar

$$S_e = 4\pi a^4 b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{(b^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi)^2} = 4\pi a^2(1-e^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^2}, \tag{36}$$

kde $e = E/a$ je první excentricita, $e^2 = 0.00669438002290$, $E = 521.8540097\,km$ je lineární excentricita, $a = 6378.137\,km$.

Substitucí $e\sin\varphi d\varphi = dt$ dostaneme integrál racionální funkce

$$S_e = \frac{4\pi a^2(1-e^2)}{e}\int_0^e \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{(1+t)^2}\right) dt =$$
$$= \frac{2\pi a^2(1-e^2)}{e}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+e}{1-e} + \frac{e}{1-e^2}\right).$$

Nyní použijeme mocninné řady

$$S_e = 2\pi b^2\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{2n-2}}{2n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} e^{2n}\right) = 4\pi b^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{2n+1}e^{2n}.$$

Z rovnosti povrchů koule a elipsoidu dostaneme pro poloměr R koule

$$4\pi R^2 = 4\pi b^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{2n+1}e^{2n},$$

neboli

$$R^2 = b^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{2n+1}e^{2n}. \tag{37}$$

Budeme-li hodnotu poloměru počítat s přesností $0.1\,km$, stačí vzít první tři členy řady (37) (plyne z nerovnice $\frac{n+1}{2n+1}b^2 < 0.001$).

Zdlouhavému výpočtu integrálu (36) jsme se mohli vyhnout využitím binomické řady

$$(1-e^2\sin^2\varphi)^{-2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{-2}{n}(-1)^n e^{2n}\sin^{2n}\varphi. \tag{38}$$

Potom stejnoměrně konvergentní řadu (38) integrujeme

$$S_e = 4\pi b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} (1+n) e^{2n} \sin^{2n} \varphi \cos \varphi d\varphi = 4\pi b^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+n}{2n+1} e^{2n} \left[\sin^{2n+1} \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 4\pi b^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+n}{2n+1} e^{2n}.$$

Fourierovy řady

Jestliže na vektorovém prostoru $\mathbb{V}$ je definován skalární součin a $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ jsou nenulové ortogonální vektory, můžeme ke každému vektoru $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$ sestrojit vektor

$$\mathbf{x}' = a_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + a_n \mathbf{e}_n, \tag{39}$$

kde

$$a_i = \frac{\mathbf{x}\,\mathbf{e}_i}{||\mathbf{e}_i||^2}\,, \ i = 1, \dots, n.$$

Tvoří-li vektory $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ bázi prostoru $\mathbb{V}$, je $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$. Jestliže netvoří bázi prostoru $\mathbb{V}$, je vektor $\mathbf{x}'$ ta lineární kombinace vektorů $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, která je nejblíže vektoru $\mathbf{x}$, tj. pro kterou je norma (velikost) rozdílu těchto vektorů minimální, tj. $||\mathbf{x} - \mathbf{x}'||$ je minimální.

Nejčastěji uváděným příkladem vektorového prostoru se skalárním součinem je vektorový prostor všech n-tic reálných čísel s kanonickým skalárním součinem

$$(u_1, \dots, u_n)(v_1, \dots, v_n) = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n. \tag{40}$$

Každé n-tici $(u_1, \dots, u_n)$ nyní přiřadíme funkci $f_{\mathbf{u}}$ definovanou na intervalu $\langle 0, n)$ předpisem

$$f_{\mathbf{u}}(x) = u_i\,, \ x \in \langle i-1, i)\,, \ i = 1, \dots, n.$$

Definovaná funkce je tedy po částech konstantní. Skalární součin (40) pak můžeme psát ve tvaru

$$\mathbf{u}\,\mathbf{v} = \int_0^n f_{\mathbf{u}}(x) f_{\mathbf{v}}(x)\, dx. \tag{41}$$

Analogicky můžeme definovat skalární součin i pro jiné množiny funkcí. Nechť $\mathcal{F}$ je množina funkcí, které na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ tvoří, s operacemi sčítání funkcí a násobení funkce číslem, vektorový prostor. Nechť pro každou funkci $f \in \mathcal{F}$ existují Riemannovy integrály

$$\int_a^b f(x)\, dx\,, \ \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Potom definujeme skalární součin (f, g) funkcí f, g předpisem (který je zobecněním definice (41))

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x)\, dx. \tag{42}$$

Protože platí

$$(f(x)+g(x))^2 = f^2(x)+2f(x)g(x)+g^2(x) \text{ a tedy}$$
$$f(x)g(x) = \frac{1}{2}((f(x)+g(x))^2 - f^2(x) - g^2(x)),$$

plyne z vyslovených předpokladů existence integrálu (42).

Dodejme ještě, že na vektorovém prostoru se skalárním součinem je definována norma (velikost) funkce f vztahem

$$||f(x)|| = \sqrt{(f,f)}.$$

Ve vektorovém prostoru n-tic reálných čísel, i ostatních konečněrozměrných vektorových prostorech se skalárním součinem, jsme při výpočtech používali ortogonální bázi. Ve vektorových prostorech funkcí můžeme najít analogický objekt, bude to posloupnost funkcí $\mathcal{F}_0 = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ z prostoru $\mathcal{F}$, pro které platí

1. Definiční obor všech funkcí posloupnosti $\mathcal{F}_0$ je daný uzavřený interval $\langle a,b\rangle$.
2. Každé dvě funkce z posloupnosti $\mathcal{F}_0$ jsou ortogonální.
3. Jestliže existuje funkce $f \in \mathcal{F}$ taková, že $(f,\varphi_i) = 0$ pro $i = 0,1,2,\dots$, potom $||f|| = 0$.

Význam bodů 1 a 2 je zřejmý. V bodě 3 se vlastně požaduje, aby množina ortogonálních funkcí φ_i z posloupnosti $\mathcal{F}_0$ byla maximální, tj. aby ji již nebylo možné doplnit další funkcí tak, aby s ostatními funkcemi posloupnosti $\mathcal{F}_0$ tvořila ortogonální skupinu funkcí.

Analogicky k rovnici (39) můžeme každou funkci $f \in \mathcal{F}$ aproximovat funkcí

$$F_n(x) = a_0\varphi_0(x) + \dots + a_n\varphi_n(x), \tag{43}$$

kde

$$a_i = \frac{(f,\varphi_i)}{(\varphi_i,\varphi_i)} = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx}{\int_a^b (\varphi_i(x))^2\,dx}$$

případně řadou

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i\varphi_i(x), \tag{44}$$

pokud tato řada konverguje.

Položíme nyní speciálně

I. $\langle a,b\rangle = \langle -\pi,\pi\rangle$.

II. $\mathcal{F}$ je množina všech spojitých funkcí na intervalu $\langle -\pi,\pi\rangle$.

III. $\mathcal{F}_0 = \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}$.

Ukážeme, že pro zvolené objekty jsou splněny podmínky z bodů 1,2 a 3 a že každou funkci f můžeme aproximovat řadou (44), která se nazývá **Fourierova řada**.

Fourierovy trigonometrické řady

Funkce

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \end{aligned} \tag{45}$$

kde $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, se nazývá **trigonometrický polynom** stupně n.

Funkce $\cos kx$, $\sin kx$ jsou periodické se společnou periodou $T = 2\pi$. Proto i funkce $F_n(x)$ je periodická se stejnou periodou.

Řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{46}$$

se nazývá **trigonometrická řada**, nebo také **Fourierova trigonometrická řada**[1]. Polynom (45) je jejím n-tým částečným součtem.

K výpočtu koeficientů a_n, b_n využijeme skalární součin (42) funkcí f, g spojitých na intervalu $\langle a, b \rangle$. Využijeme též vlastností periodických funkcí (s periodou $T > 0$), pro každé $c \in \mathbb{R}$ platí:

$$\int_c^{c+T} f(x)\, dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\, dx.$$

Pro lichou funkci je tento integrál nulový.

Snadno ověříme, že platí

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = 0, n \neq 0, \tag{47}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, \cos kx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, \sin kx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, \cos kx\, dx = 0\,, \text{ pro } n \neq k, \tag{48}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi\,, \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = \pi. \tag{49}$$

Ze vzorců (47), (48) vyplývá, že systém funkcí

$$1\,, \cos x\,, \sin x\,, \ldots, \cos nx\,, \sin nx \tag{50}$$

je pro každé n **ortogonální** vzhledem ke skalárnímu součinu (42). Integrály (49) určují čtverce jejich norem.

Je-li řada (46) stejnoměrně konvergentní na intervalu délky periody funkcí (50), existuje funkce f, která je jejím součtem, tj. můžeme psát

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{51}$$

[1] Joseph Fourier (1768-1830) byl francouzský fyzik a matematik, jehož četné práce souvisí s řešením obyčejných i parciálních diferenciálních rovnic.

Funkci f skalárně vynásobíme funkcemi (50). Vzhledem k (47) až (49) je

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\,,\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\,,\\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\,,
\end{aligned}
\tag{52}
$$

kde $n \in \mathbb{N}$. Koeficienty a_n, b_n se nazývají **Fourierovy koeficienty**.

Zbývá zjistit, kdy je řada (46) stejnoměrně konvergentní. Omezíme se na funkce, které mají spojitou a omezenou druhou derivaci na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$, tj. pro které platí: existuje $M \in \mathbb{R}$ tak, že $||f''(x)|| \leq M$ na $\langle -\pi, \pi\rangle$.

Počítejme integrál pro a_n ze (52) použitím metody per partes, a to hned dvakrát,

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{n\pi}\Big[f(x)\sin nx\Big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx =\\
&= \frac{1}{n^2\pi}\Big[f'(x)\cos nx\Big]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos nx\,dx =\\
&= -\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos nx\,dx.
\end{aligned}
$$

Protože $|f''(x)| \leq M$ pro každé $x \in \langle -\pi, \pi\rangle$, je

$$
|a_n| \leq \frac{M}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{2M}{n^2}
$$

pro každé n. Analogicky pro koeficienty b_n. Tudíž

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\right| &\leq |a_0| + \sum_{k=1}^{n}(|a_k| + |b_k|) \leq |a_0| + 4M\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leq\\
&\leq |a_0| + 4M\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}.
\end{aligned}
$$

Fourierova řada konverguje stejně jako konvergentní řada $\sum \frac{1}{k^2}$.

Platí: Je-li periodická funkce f, definovaná na $\mathbb{R}$, omezená na $\mathbb{R}$, potom její Fourierova řada konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$ a má součet

$$
\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to x-} f(t) + \lim_{t\to x+} f(t)\right). \tag{53}
$$

Pro chybu aproximace řady (51) jejím n-tým částečným součtem platí

$$
\begin{aligned}
||f(x) - F_n(x)||^2 &= ||f(x)||^2 - 2(f(x), F_n(x)) + ||F_n(x)||^2\\
&\leq ||f(x)||^2 - \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right).
\end{aligned}
$$

Je-li funkce f definovaná na $\langle -\pi, \pi\rangle$, lze ji periodicky prodloužit na celé $\mathbb{R}$, tj. tak, že $f(x+2k\pi) = f(x)$ pro každé $x \in \langle -\pi, \pi\rangle$ a každé $k \in \mathbb{Z}$. Je-li funkce f definovaná na $\langle -\pi, \pi\rangle$, lze k ní sestrojit funkci sudou tak, že pro $x \in \langle -\pi, 0\rangle$ klademe $f(x) = f(-x)$, je-li f lichá, pak pro $x \in \langle -\pi, 0\rangle$ klademe $f(x) = -f(-x)$. V obou případech pak sestrojíme přímé periodické prodloužení. K funkci f můžeme sestrojit periodické prodloužení přímé, sudé, nebo liché, viz následující příklady.

Jistě každý vidí, že se dopouštíme nepřesnosti, v krajních bodech "přidaných intervalů" (u přímého prodloužení v bodech $\pi + 2k\pi$, u lichého a sudého prodloužení v bodech $k\pi$, $k \in \mathbb{N}$) máme dány dvě funkční hodnoty. V těchto bodech definujeme v případě přímého periodického prodloužení,

$$\overline{f}(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

a v ostatních bodech $\overline{f}(x) = f(x)$. Funkce $f_s(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$, resp. funkce $f_l(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ je sudou částí, resp. lichou částí funkce f.

Zřejmě, je-li funkce f sudá, řada (51) obsahuje pouze sudé členy, tj. je řadou kosinovou

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx,$$

analogicky pro funkci lichou dostáváme řadu sinovou

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx.$$

Příklad 1. Přímé periodické prodloužení:

Pro funkci f definovanou na intervalu $\langle 0, 2\pi)$ bude jejím přímým periodickým prodloužením na celé $\mathbb{R}$ funkce, která pro $x \in \langle 2k\pi, 2(k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, bude nabývat hodnoty $f(x - 2k\pi)$.

Např. pro funkci $f(x) = x$ Fourierovy koeficienty jsou

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = 2\pi,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos kx\,dx = \frac{1}{k\pi}\Big[x\sin kx\Big]_0^{2\pi} - \frac{1}{k\pi}\int_0^{2\pi}\sin kx\,dx = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin kx\,dx = -\frac{1}{k\pi}\Big[x\cos kx\Big]_0^{2\pi} + \frac{1}{k\pi}\int_0^{2\pi}\cos kx\,dx = -\frac{2}{k}\cos 2k\pi = -\frac{2}{k}.$$

Fourierova řada dané funkce je

$$x = \pi - 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin kx}{k}.$$

Podle (53) můžeme využít Fourierovu řadu k určení součtu číselných řad. Např. pro $x = \frac{\pi}{2}$ je

$$\frac{\pi}{2} = \pi - 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin k\frac{\pi}{2}}{k} \implies \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Příklad 2. Sudé periodické prodloužení:

K funkci $f(x) = x$ na intervalu $\langle 0, \pi)$ definujeme funkci sudou rovnicí $f(x) = |x|$, $x \in \langle -\pi, \pi\rangle$. Potom sudé periodické prodloužení bude přímým prodloužením funkce $y = |x|$.

Fourierovy koeficienty funkce f, vzhledem k tomu, že je to funkce sudá, jsou

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \pi,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos kx\,dx = \frac{2}{k\pi}\Big[x\sin kx\Big]_0^\pi - \frac{2}{k\pi}\int_0^\pi \sin kx\,dx = \frac{2}{k^2\pi}(\cos k\pi - 1) =$$

$$= \frac{2}{k^2\pi}((-1)^k - 1),$$

$$b_k = 0.$$

Kosinusová Fourierova řada dané funkce je

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$

Podle (53) pro $x = 0$ je

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} \implies \frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Příklad 3. Liché periodické prodloužení:

Pro funkci $f(x) = e^x$ definovanou na intervalu $\langle 0, \pi)$ sestrojíme **lichou** *funkci*

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{pro } 0 < x \le \pi, \\ 0, & \text{pro } x = 0, \\ -e^x, & \text{pro } -\pi < x < 0, \end{cases}$$

kterou periodicky rozšíříme na $\mathbb{R}$. Fourierovy koeficienty funkce f, vzhledem k tomu, že je to funkce lichá, jsou

$$a_k = 0\,,\ \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^x \sin kx\,dx.$$

Pro výpočet primitivní funkce použijeme dvakrát metodu per partes:

$$\int e^x\sin kx\,dx = e^x\sin kx - k\int e^x\cos kx\,dx = e^x(\sin kx - k\cos kx) - k^2\int e^x\sin kx\,dx$$

$$\int e^x\sin kx\,dx = \frac{1}{k^2+1}e^x(\sin kx - k\cos kx).$$

Potom

$$b_k = \frac{2}{\pi(k^2+1)}\left[e^x(\sin kx - k\cos kx)\right]_0^\pi = \frac{2k}{\pi(k^2+1)}(1 - (-1)^k e^\pi).$$

Fourierova řada funkce f je

$$e^x = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{k^2+1}(1 - (-1)^k e^\pi)\sin kx.$$

Příklad 4. *S. Ferraz-Mello v roce 1964 definoval stínovou funkci Ψ, která byla rovna nule, jestliže družice byla ve stínu Země a jedné, jestliže byla osvětlena Sluncem. Jsou-li λ, φ geocentrické souřadnice družice, lze stínovou funkci zapsat ve tvaru*

$$\Psi(\lambda) = \begin{cases} 0, & -\varphi < \lambda < \varphi, \\ 1, & -\pi < \lambda < -\varphi\,, \ \varphi < \lambda < \pi. \end{cases}$$

Tuto funkci vyjádřil Fourierovou řadou

$$\Psi(\lambda) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos k\lambda.$$

Vypočítáme Fourierovy koeficienty:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_{\varphi}^{\pi} d\lambda = \frac{2}{\pi}(\pi - \varphi)\,, \\ a_k &= \frac{2}{\pi}\int_{\varphi}^{\pi} \cos k\lambda\, d\lambda = -\frac{2}{k\pi}\sin k\varphi. \end{aligned}$$

Potom stínová funkce je

$$\Psi(\lambda) = 1 - \frac{\varphi}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\sin k\varphi \cos k\lambda.$$

Příklad 5. *Pro elipsu danou implicitní rovnicí*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{54}$$

určíme její rovnici polární $\varrho = \varrho(\varphi)$, vzhledem k pólu v jejím jednom ohnisku. Do rovnice (54) dosadíme souřadnice bodů elipsy v polárních souřadnicích, kde E je lineární excentricita,

$$x = E + \varrho\cos\varphi\,,\ y = \varrho\sin\varphi.$$

Postupnou úpravou dostaneme kvadratickou rovnici pro ϱ

$$(a^2 - E^2\cos^2\varphi)\varrho^2 + 2\varrho E b^2\cos\varphi - b^4 = 0.$$

Její diskriminant je

$$D = 4(E^2 b^4 \cos^2\varphi + a^2 b^4 - b^4 E^2 \cos^2\varphi) = 4a^2 b^4.$$

Z kořenů kvadratické rovnice nás zajímá ten, který je kladný (ϱ je vzdálenost), tj.

$$\varrho = \frac{-Eb^2\cos\varphi + ab^2}{a^2 - E^2\cos^2\varrho} = b^2\frac{a - E\cos\varphi}{a^2 - E^2\cos^2\varphi}.$$

Odtud

$$\varrho = \frac{b^2}{a + E\cos\varphi} = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}, \tag{55}$$

kde jsme označili $p = b^2/a$, tj. parametr, $e = E/a$ je numerická excentricita. Pro $e < 1$ dosáváme elipsu, pro $e > 1$ hyperbolu a pro $e = 1$ parabolu. Tohoto vyjádření elipsy se využívá v Keplerových zákonech a při studiu elementů Keplerovského pohybu.

K aproximaci funkce (55) využijeme n-tý částečný součet Fourierovy řady. Funkce (55) je sudá, proto koeficienty b_k jsou nulové. K určení dvou koeficientů a_n budeme potřebovat integrál funkce (55). K jeho výpočtu použijeme substituci tg $\frac{1}{2}\varphi = t$. Potom $d\varphi = \frac{2\,dt}{1+t^2}$, $\cos\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ a $t \in \langle 0, +\infty)$. Po dosazení dostáváme

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{1 \pm e\cos\varphi} = 4\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 \pm e + (1 \mp e)t^2} = \frac{4}{1 \pm e}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + \frac{1 \mp e}{1 \pm e}t^2} =$$

$$= \frac{4}{1 \pm e}\sqrt{\frac{1 \pm e}{1 \mp e}}\left[\operatorname{arctg} t\sqrt{\frac{1 \mp e}{1 \pm e}}\right]_0^{+\infty} = \frac{4\pi}{2\sqrt{1 - e^2}} = \frac{2\pi a}{b},$$

kde $\sqrt{1 - e^2} = \sqrt{1 - \frac{E^2}{a^2}}$.

Nyní pro Fourierovy koeficienty platí

$$a_0 = \frac{b^2}{a\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{1 + e\cos\varphi} = 2b.$$

Integrál prvního koeficientu řešíme rozkladem

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{1 + e\cos\varphi} = \frac{2}{e}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{1}{1 + e\cos\varphi}\right)d\varphi = \frac{2}{e}\left(\pi - \frac{\pi a}{b}\right) = \frac{2\pi(b - a)}{be}.$$

Potom

$$a_1 = \frac{b^2}{\pi a}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{1 + e\cos\varphi} = -2b\frac{a - b}{E}.$$

Pro výpočet druhého koeficientu použijeme předchozích integrálů

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{1 + e\cos\varphi} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2\cos^2\varphi - 1}{1 + e\cos\varphi}d\varphi = -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{1 + e\cos\varphi} + \frac{2}{e^2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^2\cos^2\varphi}{e\cos\varphi + 1}d\varphi =$$

$$= -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{1 + e\cos\varphi} + \frac{2}{e^2}\int_{-\pi}^{\pi}(e\cos\varphi - 1)d\varphi + \frac{2}{e^2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{e\cos\varphi + 1} = \frac{2\pi a(a - b)^2}{E^2 b}.$$

Potom

$$a_2 = \frac{b^2}{\pi a}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{1 + e\cos\varphi} = 2b\frac{(a - b)^2}{E^2}.$$

I pro výpočet třetího koeficientu použijeme rozklad

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 3\varphi\, d\varphi}{1 + e\cos\varphi} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi}{1 + e\cos\varphi}d\varphi =$$

$$= \frac{4}{e^3}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1 + e^3\cos^3\varphi}{1 + e\cos\varphi}d\varphi - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{1 + e\cos\varphi}\right) - 3\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\varphi}{1 + e\cos\varphi}d\varphi =$$

$$= \frac{4}{e^3}\int_{-\pi}^{\pi}(1 - e\cos\varphi + e^2\cos^2\varphi)d\varphi - \frac{4}{e^3}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{e\cos\varphi + 1} - 3\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\varphi}{1 + e\cos\varphi}d\varphi.$$

Potom s využitím předchozích intergálů dostaneme

$$a_3 = \frac{b^2}{\pi a} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 3\varphi \, d\varphi}{1 + e \cos \varphi} = -2b \frac{(a-b)^3}{E^3}.$$

Z vypočítaných koeficientů odhadneme tvar Fourierovy řady

$$\frac{b^2}{a + E \cos \varphi} = 2b \left(1 - \frac{a-b}{E} \cos \varphi + \frac{(a-b)^2}{E^2} \cos 2\varphi - \frac{(a-b)^3}{E^3} \cos 3\varphi + \dots \right).$$