STUDIJNÍ TEXT PRO OBOR G+K
KATEDRA MATEMATIKY
FAKULTA STAVEBNÍ
ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ

LINEÁRNÍ OPERÁTOR a KVADRATICKÁ FORMA

Lineární operátor
Afinní zobrazení
Bilineární a kvadratická forma
Kuželosečky
Numerické řešení soustav lineárních rovnic

Doc. RNDr. Milada Kočandrlová, CSc.

2005

Matice přechodu

Je-li $\mathbb{V}$ vektorový prostor a $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ je jeho báze, můžeme každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$ napsat jako lineární kombinaci vektorů báze, tj.

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n\,, \text{ resp. } \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{v}_i\,,\ x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Je-li $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ jiná báze prostoru $\mathbb{V}$, pak také můžeme psát

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{n1}\mathbf{v}_n\,, \\ \cdots&\cdots\cdots \\ \mathbf{w}_n &= a_{1n}\mathbf{v}_1 + a_{2n}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{nn}\mathbf{v}_n\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Matice $\mathbb{A} = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$, se nazývá **matice přechodu** od báze $\mathcal{V}$ k bázi $\mathcal{W}$. Vyjádříme-li vektor $\mathbf{x}$ v bázi $\mathcal{W}$

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x'_j\mathbf{w}_j\,,$$

a dosadíme vektory (2), dostáváme

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{v}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_j \right) \mathbf{v}_i\,.$$

Protože souřadnice vektoru, v dané bázi, jsou určeny jednoznačně, srovnáním s vyjádřením vektoru $\mathbf{x}$ v (1) dostáváme pro jeho souřadnice

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_j.$$

Lineární operátor

Nechť $\mathbb{V}$, $\mathbb{W}$ jsou vektorové prostory. Zobrazení $\mathcal{A}\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, pro které platí

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y}), \\ \mathcal{A}(\alpha\mathbf{x}) &= \alpha\mathcal{A}(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

pro každá $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$ a každé $\alpha \in \mathbb{R}$, se nazývá **lineární operátor** na vektorovém prostoru $\mathbb{V}$ s hodnotami ve vektorovém prostoru $\mathbb{W}$.

Lineární operátor je zobrazení, které každému vektoru $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$ přiřadí vektor $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \in \mathbb{W}$. Je-li $\mathbb{W} = \mathbb{R}$, operátoru $\mathcal{A}$ se říká funkcionál, v geometrii pak lineární forma. Je-li $\mathbb{V} = \mathbb{W}$, je $\mathcal{A}$ transformace prostoru $\mathbb{V}$.

Z vyslovené definice vyplývá, že jsou-li $\mathbf{x}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in \mathbb{V}$ a

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_k\mathbf{u}_k\,, \quad \text{je} \quad \mathcal{A}(\mathbf{x}) = x_1\mathcal{A}(\mathbf{u}_1) + \cdots + x_k\mathcal{A}(\mathbf{u}_k).$$

Protože každý vektor můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů báze, **lineární operátor je dán obrazy vektorů báze**.

Nechť $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ je báze prostoru $\mathbb{V}$ a $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m\}$ je báze prostoru $\mathbb{W}$. Potom každý vektor $\mathcal{A}(\mathbf{v}_i)$ vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů báze $\mathcal{W}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\mathbf{v}_1) &= a_{11}\mathbf{w}_1 + a_{21}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m1}\mathbf{w}_m\\
\mathcal{A}(\mathbf{v}_2) &= a_{12}\mathbf{w}_1 + a_{22}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m2}\mathbf{w}_m\\
&\dots\dots\\
\mathcal{A}(\mathbf{v}_n) &= a_{1n}\mathbf{w}_1 + a_{2n}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{mn}\mathbf{w}_m.
\end{aligned}$$

Každému operátoru $\mathcal{A}$ je tak, vzhledem k bázím $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$, přiřazena matice $\mathbb{A} = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Zřejmě ke každé matici $m \times n$ existuje zobrazení prostoru $\mathbb{V}$ do prostoru $\mathbb{W}$.

Zřejmým způsobem definujeme součet lineárních operátorů na vektorovém prostoru $\mathbb{V}$ s hodnotami ve $\mathbb{W}$. Součtem operátorů $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ je operátor $\mathcal{A} + \mathcal{B}$, pro který platí $(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}(\mathbf{x})$, pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$. Podobně definujeme: násobek lineárního operátoru $\mathcal{A}$ reálným číslem $\alpha \in \mathbb{R}$ je lineární operátor, pro který platí $(\alpha\mathcal{A})(\mathbf{x}) = \alpha\mathcal{A}(\mathbf{x})$.

Zřejmě platí: Je-li $\mathcal{A}\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ a $\mathcal{B}\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, potom

- součtu operátorů $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ je přiřazen součet jejich matic $\mathbb{A} + \mathbb{B}$,
- násobku operátoru $\alpha\mathcal{A}$ je přiřazen násobek jeho matice $\alpha\mathbb{A}$.

Nechť $\mathcal{A}$ je operátor z vektorového prostoru $\mathbb{V}$ do $\mathbb{V}$ a $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ je báze $\mathbb{V}$. Jak bylo řečeno, každý vektor $\mathbf{x}$ můžeme psát jako lineární kombinaci (1) vektorů báze. Označíme-li

$$\mathbf{w}_i = \mathcal{A}(\mathbf{v}_i)\,,\ i = 1, \dots, n,$$

můžeme vektory $\mathbf{w}_i$ psát ve tvaru (2). Matice $\mathbb{A} = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$, se nazývá **matice operátoru $\mathcal{A}$**.

Potom obrazem vektoru $\mathbf{x}$ je vektor

$$\mathbf{x}' = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{w}_i.$$

Po dosazení za vektory $\mathbf{w}_i$ pro něj dostáváme vyjádření

$$\mathbf{x}' = x_1(a_{11}\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{n1}\mathbf{v}_n) + x_2(a_{12}\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{n2}\mathbf{v}_n) + \cdots + x_n(a_{1n}\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{nn}\mathbf{v}_n).$$

Označíme-li $\mathbf{x}' = (x'_1, \dots, x'_n)$ souřadnice vektoru $\mathbf{x}'$ v bázi $\mathcal{V}$, dostaneme

$$\begin{aligned}
x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n,\\
x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n,\\
&\dots\dots\\
x'_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n,
\end{aligned}$$

v maticovém tvaru pak

$$\mathbf{x}'^T = \mathbb{A}\mathbf{x}^T.$$

Bude-li $\mathcal{B}$ další operátor z $\mathbb{V}$ do $\mathbb{V}$ daný maticí $\mathbb{B}$, můžeme oba operátory složit. Označíme-li $\mathbf{x}''$ obraz vektoru $\mathbf{x}'$ při operátoru $\mathcal{B}$, je

$$\mathbf{x}''^T = \mathbb{B}\mathbf{x}'^T = \mathbb{B}\mathbb{A}\,\mathbf{x}^T. \tag{3}$$

Zjistili jsme, že platí:

Má-li operátor $\mathcal{A}$, resp. $\mathcal{B}$, matici $\mathbb{A}$, resp. $\mathbb{B}$, potom složený operátor $\mathcal{C} = \mathcal{A} \circ \mathcal{B}$, pro který platí

$$\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x})),$$

má matici $\mathbb{C} = \mathbb{B}\mathbb{A}$.

Příklad 1. Otočení v euklidovské rovině. *V zaměření roviny zvolíme ortonormální bázi $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Každý vektor $\mathbf{x}$ můžeme určit jeho velikostí $\|\mathbf{x}\|$ a orientovaným úhlem φ_x vektorů $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{x}$ (první rameno úhlu je určeno vektorem $\mathbf{e}_1$). Potom vektor $\mathbf{x}$ můžeme psát ve tvaru*

$$\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\| \cos\varphi_x\, \mathbf{e}_1 + \|\mathbf{x}\| \sin\varphi_x\, \mathbf{e}_2.$$

Při otočení o úhel α se vektor $\mathbf{x}$ zobrazí na vektor $\mathbf{x}'$, který bude mít stejnou velikost a jeho úhel s vektorem $\mathbf{e}_1$ bude $\varphi_x + \alpha$, tj.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}' &= \|\mathbf{x}\| \cos(\varphi_x + \alpha)\, \mathbf{e}_1 + \|\mathbf{x}\| \sin(\varphi_x + \alpha)\, \mathbf{e}_2 = \\ &= \|\mathbf{x}\|(\cos\varphi_x \cos\alpha - \sin\varphi_x \sin\alpha)\, \mathbf{e}_1 + \|\mathbf{x}\|(\sin\varphi_x \cos\alpha + \cos\varphi_x \sin\alpha)\, \mathbf{e}_2 = \\ &= \|\mathbf{x}\|\ \cos\varphi_x(\cos\alpha\, \mathbf{e}_1 + \sin\alpha\, \mathbf{e}_2) + \|\mathbf{x}\| \sin\varphi_x(-\sin\alpha\, \mathbf{e}_1 + \cos\alpha\, \mathbf{e}_2).\end{aligned}$$

Tudíž obrazy vektorů báze, v tomto otočení, budou vektory

$$\begin{aligned}\mathbf{e}'_1 &= \cos\alpha\, \mathbf{e}_1 + \sin\alpha\, \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_2 &= -\sin\alpha\, \mathbf{e}_1 + \cos\alpha\, \mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

Vektory $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ určují v rovině ortonormální bázi $\mathcal{E}'$.

Matice

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

je matice přechodu od báze $\mathcal{E}$ k bázi $\mathcal{E}'$. Jestliže báze $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ určují v rovině dvě kartézské soustavy souřadnic se společným počátkem P, potom matice $\mathbb{A}^{-1}$ je **matice rotace** *soustavy $\langle P, x, y\rangle$ kolem počátku o úhel α do soustavy $\langle P, x', y'\rangle$. Transformace mezi oběma soustavami souřadnic je*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Doplníme-li báze $\mathcal{E}$ a $\mathcal{E}'$ na ortonormální báze prostoru $\mathbb{R}^3$, potom matice

$$\mathbb{A}_x = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & \cos\alpha, & \sin\alpha \\ 0, & -\sin\alpha, & \cos\alpha \end{pmatrix},\ \mathbb{A}_y = \begin{pmatrix} \cos\alpha, & 0, & -\sin\alpha \\ 0, & 1, & 0 \\ \sin\alpha, & 0, & \cos\alpha \end{pmatrix},\ \mathbb{A}_z = \begin{pmatrix} \cos\alpha, & \sin\alpha, & 0 \\ -\sin\alpha, & \cos\alpha, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

jsou matice rotace kartézské soustavy souřadnic v prostoru pořadě, kolem osy x, y, z.

Příklad 2. *Při určování polohy hvězdy je třeba brát v úvahu také pohyb precesní, nutační a vlastní rotaci Země, které jsou dány úhlovou rychlostí, tzv.* **Eulerovými úhly** ψ, ϑ *a* φ. *Výsledná transformace topocentrických souřadnic hvězdy (kartézské souřadnice s počátkem ve stanovišti pozorovatele)* $[x, y, z]$ *na* $[x'y'z']$ *je složena ze tří rotací:*

1. rotace kolem osy z *o precesní úhel* ψ, *ve které osa* x *přejde v průsečnici* x_ψ *rovin* xy *a* $x'y'$. *Její matice je*

$$\mathbb{A}_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi, & \sin\psi, & 0 \\ -\sin\psi, & \cos\psi, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

2. rotace kolem osy x_ψ *o nutační úhel* ϑ, *ve které osa* z *přejde v osu* $z' = z_\psi$. *Její matice je*

$$\mathbb{A}_\vartheta = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & \cos\vartheta, & \sin\vartheta \\ 0, & -\sin\vartheta, & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

3. rotace kolem osy $z' = z_\vartheta$ *o úhel* φ *vlastní rotace Země, ve které osy* x_ψ, y_ψ *přejdou v osy* x', y'. *Její matice je*

$$\mathbb{A}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi, & \sin\varphi, & 0 \\ -\sin\varphi, & \cos\varphi, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice výsledné transformace, podle (3), je součinem matic $\mathbb{A}_\varphi \mathbb{A}_\vartheta \mathbb{A}_\psi$

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\vartheta\sin\psi, & \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\vartheta\cos\psi, & \sin\varphi\sin\vartheta \\ -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\cos\vartheta\sin\psi, & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\vartheta\cos\psi, & \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta\sin\psi, & -\sin\vartheta\cos\psi, & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Afinita

Dělicí poměr tří, po dvou různých, bodů X, Y, Z jedné přímky, je číslo

- $\frac{|XZ|}{|YZ|}$, jestliže bod Z není bodem úsečky XY,
- $-\frac{|XZ|}{|YZ|}$, jestliže bod Z je bodem úsečky XY.

Zobrazení na euklidovském prostoru $f\colon \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$ se nazývá **afinita**, jestliže pro každé tři navzájem různé body X, Y, Z, které leží na jedné přímce, platí:

jejich obrazem je buď jeden bod, nebo tři navzájem různé body X', Y', Z' jedné přímky a dělicí poměry vzorů a obrazů jsou stejné.

Střed S dvojice bodů A, B můžeme charakterizovat pomocí dělicího poměru tak, že je to takový bod přímky AB, pro který je dělicí poměr bodů A, B, S roven -1. Tudíž afinita zobrazí střed libovolné dvojice bodů na střed jejich obrazů. Dvě dvojice bodů A, B a $\overline{A}, \overline{B}$ určují stejný vektor právě tehdy, když dvojice bodů $A\overline{B}$ a $\overline{A}B$ mají společný střed.

K afinitě f tudíž můžeme definovat zobrazení $\mathcal{A}$ zaměření $\mathbb{V}_3$ euklidovského prostoru $\mathbb{E}_3$ do zaměření $\mathbb{V}_3$ tak, že

$$\mathcal{A}(X - Y) = f(X) - f(Y)$$

a obraz vektoru nezávisí na tom, které dvojice bodů jej určují. Sčítání vektorů je definováno rovností $(B - A) + (C - B) = C - A$. Snadno se můžeme přesvědčit, že násobení vektoru číslem můžeme popsat pomocí dělicího poměru. Tudíž zobrazení $\mathcal{A}$ je transformace vektorového prostoru $\mathbb{V}_3$.

K afinitě f tudíž existuje transformace na vektorovém zaměření $\mathbb{V}_3$ euklidovského prostoru $\mathcal{A}\colon \mathbb{V}_3 \to \mathbb{V}_3$ tak, že zvolíme-li soustavy souřadnic

$$\mathcal{E} = \langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle\,, \text{ resp. } \mathcal{G} = \langle P, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3 \rangle,$$

pro prostor vzorů, resp. prostor obrazů a $P = f(O) = [b_1, b_2, b_3]$, pak obraz bodu

$$X = O + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$$

je bod

$$f(X) = f(O) + x_1\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) + x_2\mathcal{A}(\mathbf{e}_2) + x_3\mathcal{A}(\mathbf{e}_3),$$

který v soustavě souřadnic $\mathcal{G}$ má vyjádření

$$f(X) = P + x_1'\mathbf{g}_1 + x_2'\mathbf{g}_2 + x_3'\mathbf{g}_3.$$

Je-li $\mathbb{A}$ matice operátoru $\mathcal{A}$ vzhledem k bázím $\mathcal{E}$ a $\mathcal{G}$, tj. matice přechodu od báze $\mathcal{E}$ k bázi $\mathcal{G}$, je

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

analytické vyjádření afinity v prostoru. Z rovnice (4), která má dvanáct neznámých a_{ij}, b_i, je zřejmé, že k určení afinity potřebujeme znát dvanáct podmínek, např. čtyři dvojice odpovídajících si bodů.

Afinita v rovině

Každou afinitu v rovině $\mathbb{E}_2$ můžeme psát ve tvaru

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Bod $X = [x, y]$, pro který platí $f(X) = X$, nazýváme **samodružný bod** afinity f. Pro jeho souřadnice platí soustava dvou nehomogenních rovnic pro dvě neznámé x, y

$$\begin{pmatrix} 1 - a_{11}, & -a_{12} \\ -a_{21}, & 1 - a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Jednorozměrný podprostor $\{\mathbf{u}\} \subset \mathbb{V}_2$, určený nenulovým vektorem $\mathbf{u}$, nazveme **směr** roviny $\mathbb{E}_2$. Směr $\{u\}$ bude **samodružný směr** operátoru $\mathcal{A}$, jestliže vektory $\mathbf{u}$ a $\mathcal{A}(\mathbf{u})$ budou lineárně závislé, tj. jestliže existuje reálné číslo $\lambda \neq 0$ takové, že

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}\,, \text{ nebo-li } \mathbb{A}\,\mathbf{u}^T = \lambda\,\mathbf{u}^T.$$

Číslo λ se nazývá **vlastní číslo** operátoru $\mathcal{A}$, resp. **vlastní číslo** matice $\mathbb{A}$. Nenulový vektor $\mathbf{u}$ se nazývá **vlastní vektor** operátoru $\mathcal{A}$, resp. **vlastní vektor** matice $\mathbb{A}$. Je-li $\lambda = 0$, je obrazem přímky, se směrovým vektorem $\mathbf{u}$, bod.

Vlastní vektory jsou řešením soustavy dvou homogenních rovnic pro dvě neznámé s parametrem λ

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aby tato soustava měla netriviální řešení, je nutné a stačí, aby determinant matice soustavy byl nulový, tj.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Rovnice (5) se nazývá **charakteristická rovnice** vlastních čísel matice $\mathbb{A}$.

Příklad 3. *Pro rovinné transformace, které známe ze střední školy, a jsou popsány následujícími rovnicemi, určete samodružné body a samodružné směry. Vypočítejte též determinant matice zobrazení.*

1. *identita*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2. *translace (posunutí) o vektor* (b_1, b_2)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

3. *stejnolehlost se středem v počátku a koeficientem* λ

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda, & 0 \\ 0, & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

4. *podobnost s koeficientem* λ

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda, & 0 \\ 0, & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

5. *rotace, otáčení kolem počátku o úhel* α, $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

6. *středová souměrnost o středu v počátku*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

7. *osová souměrnost s osou x*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Transformace v rovině (nebo prostoru) je shodnost, jestliže její matice je ortogonální, tj. její řádky tvoří množinu ortonormálních vektorů. Potom determinant matice je roven jedné, nebo minus jedné. Shodnosti s kladným determinantem jsou přímé, se záporným determinantem nepřímé.

Příklad 4. *Určíme všechny shodnosti v rovině, které mají samodružný bod* $[2, 0]$ *a samodružné směry* $(1, 1)$, $(1, -1)$.

Shodnosti, vyhovující daným podmínkám, mohou být: Identita, osová, nebo středová souměrnost.

a) *Jestliže pro dané směry platí:*

$$(1, 1) \to (1, 1)\,, \ (1, -1) \to (1, -1),$$

jedná se o identitu. Její rovnice jsou

$$x' = x\,, \ y' = y.$$

b) *Jestliže pro dané směry platí:*

$$(1, 1) \to (1, 1)\,, \ (1, -1) \to (-1, 1),$$

jedná se o osovou souměrnost. Její osa je určena samodružným bodem a směrem $(1, 1)$. *Proto její rovnice jsou*

$$x' = y + 2\,, \ y' = x - 2.$$

c) *Jestliže pro dané směry platí:*

$$(1, 1) \to (-1, -1)\,, \ (1, -1) \to (1, -1),$$

jedná se o osovou souměrnost. Její osa je určena samodružným bodem a směrem $(1, -1)$. *Proto její rovnice jsou*

$$x' = -y + 2\,, \ y' = -x + 2.$$

d) *Jestliže pro dané směry platí:*

$$(1, 1) \to (-1, -1)\,, \ (1, -1) \to (-1, 1),$$

jedná se o středovou souměrnost se středem v samodružném bodě. Proto její rovnice jsou

$$x' = -x + 4\,, \ y' = -y.$$

Příklad 5. Podobnostní transformace *v geodézii se říká zobrazení v rovině, složenému z translace, rotace a měřítkové transformace (dilatace). V rovině* $\mathbb{R}^2$ *zvolíme dvě kartézské soustavy souřadnic,* $\mathcal{S} = \langle 0, x, y \rangle$ *a* $\mathcal{S}' = \langle 0', x', y' \rangle$*. Identickým bodem se v geodézii nazývá bod* X*, který je dán (zaměřen) souřadnicemi v obou soustavách souřdnic. Přestože je to ten samý bod, označíme ho* $X = [x, y]$*, resp.* $X' = [x', y']$ *v soustavě* $\mathcal{S}$*, resp.* $\mathcal{S}'$*. Potom transformovaný bod* X' *ze soustavy* $\mathcal{S}'$ *do soustavy* $\mathcal{S}$*, vzhledem k měřickým chybám, nebude totožný. Proto je třeba vedle translace a rotace provádět měřítkovou transformaci.*

Označíme ještě $O' = [t_x, t_y]$ *a* $\varphi = \sphericalangle(x, x')$*. Potom translace je určena vektorem* $O' - O = (t_x, t_y)$ *a matice rotace je*

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi, & -\sin\varphi \\ \sin\varphi, & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Délkový koeficient q *pro dilataci se definuje jako poměr vzdálenosti dvou bodů v soustavě* $\mathcal{S}'$ *a vzdálenosti těchto bodů v soustavě* $\mathcal{S}$*.*

Výsledná transformace má potom tvar:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q\cos\varphi, & -q\sin\varphi \\ q\sin\varphi, & q\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Označíme-li $\lambda_1 = q\cos\varphi$*,* $\lambda_2 = q\sin\varphi$*, potom transformační rovnice mají tvar*

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 x' - \lambda_2 y' + t_x \\ y &= \lambda_1 y' + \lambda_2 x' + t_y. \end{aligned}$$

To je soustava dvou rovnic pro čtyři neznámé $\lambda_1, \lambda_2, t_x, t_y$*, kterou můžema zapsat ve tvaru*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x', & -y', & 1, & 0 \\ y', & x', & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ t_x \\ t_y \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Pro jednoznačné určení všech čtyř neznámých je tudíž třeba zaměřit dva různé body v obou soustavách souřadnic, tj. body $X_i = [x_i, y_i]_{\mathcal{S}}$*,* $X_i' = [x_i', y_i']_{\mathcal{S}}$*,* $i = 1, 2$*.*

Soustava (7) bude mít potom tvar

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1', & -y_1', & 1, & 0 \\ x_2', & -y_2', & 1, & 0 \\ y_1', & x_1', & 0, & 1 \\ y_2', & x_2', & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ t_x \\ t_y \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Příklad 6. Helmertova transformace *je podobnostní transformace pro případ* $2k$*,* $k > 2$ *zaměřených bodů (s měřickou chybou). Provedeme-li pro každou dvojici bodů podobnostní transformaci z příkladu 5, dostaneme různé hodnoty parametrů* $\lambda_1, \lambda_2, t_x, t_y$*. Proto je třeba provést vyrovnání měřických chyb. Nejpoužívanější metoda vyrovnání je metoda nejmenších čtverců (MNČ).*

Označíme-li $X = [x, y]$ *bod v souřadnicové soustavě* $\mathcal{S}$, X_0 *transformovaný bod* $X' = [x', y']$ *ze soustavy* $\mathcal{S}'$ *do soustavy* $\mathcal{S}$, *podle MNČ hledáme koeficienty transformace tak, aby*

$$||X_0 - X||^2 = \min$$

pro každou dvojici bodů. (Dva body podle (8) určují koeficienty transformace.) Označíme-li $\mathbf{v} = X_0 - X$, *potom podle (8) je*

$$\begin{pmatrix} x'_1, & -y'_1, & 1, & 0 \\ x'_2, & -y'_2, & 1, & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x'_k, & -y'_k, & 1, & 0 \\ y'_1, & x'_1, & 0, & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y'_k, & x'_k, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ t_x \\ t_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} = \mathbf{v}^T,$$

v maticovém tvaru

$$\mathbb{A}\,\mathbf{h}^T - \mathbf{x}^T = \mathbf{v}^T.$$

Součin $\mathbb{A}\,\mathbf{h}^T$ *je maticově zapsaná lineární kombinace sloupcových vektorů* $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3, \mathbf{s}_4$ *matice* $\mathbb{A}$ *s koeficienty* $\lambda_1, \lambda_2, t_x, t_y$. *Velikost vektoru* $\mathbf{v}$ *bude minimální, jestliže tento vektor bude ortogonální na vektory* $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3, \mathbf{s}_4$, *tj.*

$$\mathbb{A}^T(\mathbb{A}\,\mathbf{h}^T - \mathbf{x}^T) = 0,$$

$$(\mathbb{A}^T\mathbb{A})\,\mathbf{h}^T = \mathbb{A}^T\,\mathbf{x}^T.$$

Odtud

$$\mathbf{h}^T = (\mathbb{A}^T\mathbb{A})^{-1}\mathbb{A}^T\,\mathbf{x}^T$$

je vyrovnaný vektor koeficientů Helmertovy transformace.

Numerické zadání:

$$X_1 = [102\,734.555; 103\,013.662]\,,\ X'_1 = [0.0; 345.182],$$

$$X_2 = [\ 73\,262.232; 73\,465.333]\,,\ X'_2 = [0.0; 0.0]$$

Označíme $a = 345.182$, *potom podle (8)*

$$\begin{pmatrix} 0, & -a, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ a, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} 0, & a, & 0, & 0 \\ 0, & -a, & -a^2, & 0 \\ -a, & 0, & 0, & 0 \\ a, & 0, & 0, & -a^2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0, & 0, & \frac{1}{a}, & -\frac{1}{a} \\ -\frac{1}{a}, & \frac{1}{a}, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix},$$

kde $\frac{1}{a} = 2.897\,022\,44 \cdot 10^{-3}$. *Potom*

$$\begin{pmatrix} 0, & 0, & \frac{1}{a}, & -\frac{1}{a} \\ -\frac{1}{a}, & \frac{1}{a}, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a}(y_1 - y_2) \\ \frac{1}{a}(x_2 - x_1) \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 85.602\,172\,18 \\ -85.381\,981\,1 \\ 73\,262.232 \\ 73\,465.333 \end{pmatrix}.$$

Helmertova transformace je dána rovnicemi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 85.602\,172\,18, & 85.381\,981\,1 \\ -85.381\,981\,1, & 85.602\,172\,18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 73\,262.232 \\ 73\,465.333 \end{pmatrix}.$$

Příklad 7. *Pomocí jednotkového čtverce definujeme transformaci, která se využívá při kódování obrazu pro elektronický přenos. Matice této transformace souvisí s číselnou posloupností Fibonacciovou.*

Zvolme čtverec $ABCD$ takto: $A = [0,0]$, $B = [1,0]$, $C = [1,1]$, $D = [0,1]$. Dále rozlišíme dva případy, kdy souřadnice x, y čtverce splňují podmínku (kreslete si obrázek)

a) $x + y \geq 1$

b) $0 \leq x + y \leq 1$.

a) *Trojúhelník BCD zobrazíme, v osové souměrnosti s osou $y = x$, na trojúhelník $B_1C_1D_1$, kde $B_1 = D$, $D_1 = B$, $C_1 = C$, tj.*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Dále trojúhelník $B_1C_1D_1$, v afinitě (elaci) s osou D_1C_1 a směrem $\mathbf{s} = (0,-1)$, na trojúhelník $B'C'D'$, kde $C' = C_1$, $D' = D_1$, $B' = A$, tj.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Složením obou zobrazení dostaneme výslednou transformaci pro danou podmínku:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b) *Trojúhelník ABD zobrazíme, v osové souměrnosti s osou $y = x$, na trojúhelník $A_1B_1D_1$, viz a).*

Trojúhelník $A_1B_1D_1$, v afinitě (elaci) s osou D_1C_1 a směrem $\mathbf{s} = (0,-1)$, na trojúhelník $A_2B_2D_2$, kde $D_2 = D_1$, $A_2 = [0,-1]$, $B_2 = A$, viz a).

Trojúhelník $A_2B_2D_2$, v translaci $\mathbf{s} = (0,1)$, na trojúhelník $A'B'D'$, kde $A' = A$, $B' = D$, $D' = C$, tj.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Složením všech tří zobrazení dostaneme výslednou transformaci pro danou podmínku:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Prvky mocnin matice $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}$ transformace jsou prvky Fibonacciovy posloupnosti, která je dána rekurentním vzorcem

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n\,,\ F_0 = 0\,,\ F_1 = 1,$$

tj.

$$\mathbb{A}^2 = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}, \mathbb{A}^3 = \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 2, & 3 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbb{A}^n = \begin{pmatrix} F_{n-1}, & F_n \\ F_n, & F_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Homogenní souřadnice, kolineace

V euklidovském prostoru můžeme pracovat se zobrazeními, která každý zná a o kterých jsme dosud nemluvili. Příkladem takového zobrazení je středové promítání. V prostoru $\mathbb{E}_3$ zvolíme rovinu π a střed promítání S, který neleží v rovině π. Potom k libovolnému bodu $X \neq S$ budeme hledat průsečík X' přímky SX s rovinou π. Příkladem takového zobrazení je fotografie.

Vidíme, že bude-li přímka SX rovnoběžná s rovinou π, tak hledaný bod neexistuje. Aby každý bod X z prostoru měl svůj obraz X', doplníme rovinu π o tzv. nevlastní body.

Označíme ν množinu všech jednorozměrných podprostorů (směrů, směrových vektorů přímek rovnoběžných s rovinou π) vektorového prostoru $\mathbb{V}_2$, zaměření roviny π. Prvky množiny ν se nazývají **nevlastní body** a množina $\overline{\pi} = \pi \cup \nu$ se nazývá **projektivní rozšíření** roviny π.

Každým nenulovým vektorem $\mathbf{x} \in \mathbb{V}_3$, který není ze zaměření $\mathbb{V}_2$, a bodem S je určena promítací přímka protínající rovinu π v bodě X. Zřejmě nenulový násobek vektoru $\mathbf{x}$ určuje stejný bod X. Zvolíme-li libovolnou bázi $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ prostoru $\mathbb{V}_3$, můžeme určit souřadnice (x_1, x_2, x_3) vektoru $\mathbf{x}$ v této bázi. Tyto souřadnice určují vektor $\mathbf{x}$, a tedy i bod X. Protože s trojicí (x_1, x_2, x_3) určuje bod X i trojice (kx_1, kx_2, kx_3), kde $k \neq 0$, nazývají se tyto souřadnice **homogenní souřadnice** bodu X.

Máme-li v rovině π zvolenou kartézskou soustavu souřadnic $\langle P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$, označíme $\mathbf{e}_3 = P - S$ a zjistíme, jak spolu souvisí kartézské a homogenní souřadnice bodu X.

Jsou-li x, y kartézské souřadnice bodu X, je

$$X = P + x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2.$$

Bod X můžeme určit např. vektorem $X - S$. Potom

$$X - S = (P - S) + x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2\,, \text{ tj. } X - S = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + 1 \cdot \mathbf{e}_3.$$

Bod X má tedy homogenní souřadnice $(x, y, 1)$.

Nevlastní body jsou určeny vektory ze zaměření $\mathbb{V}_2$, to znamená vektory, které mají poslední souřadnici nulovou.

Projektivní rozšíření prostoru $\mathbb{E}_3$ provedeme formálně úplně stejně, ale pro názornou představu nám chybí jeden rozměr. Opět označíme ν množinu všech jednorozměrných podprostorů prostoru $\mathbb{V}_3$ a její prvky nazveme nevlastní body. Množinu $\overline{\mathbb{E}}_3 = \mathbb{E}_3 \cup \nu$ nazveme **projektivním rozšířením** prostoru $\mathbb{E}_3$.

Máme-li v prostoru $\mathbb{E}_3$ dánu kartézskou (nebo lineární) soustavu souřadnic $\langle O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ a v této soustavě je bod $X = [x, y, z]$, potom jeho homogenní souřadnice jsou (kx, ky, kz, k) pro každé $k \neq 0$.

Je-li U nevlastní bod určený vektorem $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, jsou jeho homogenní souřadnice $(u_1, u_2, u_3, 0)$.

Nechť nyní obráceně $X \in \overline{\mathbb{E}}_3$ má homogenní souřadnice (x_1, x_2, x_3, x_4)

- je-li $x_4 \neq 0$, je čtveřicí (x_1, x_2, x_3, x_4) určen bod z $\mathbb{E}_3$, říkáme též vlastní bod. Jeho kartézské (resp. lineární) souřadnice jsou

$$x = \frac{x_1}{x_4}\,,\ y = \frac{x_2}{x_4}\,,\ z = \frac{x_3}{x_4}.$$

- je-li $x_4 = 0$, je čtveřicí (x_1, x_2, x_3, x_4) určen vektor ze zaměření prostoru $\mathbb{E}_3$, říkáme též nevlastní bod. Jeho kartézské (resp. lineární) souřadnice tedy jsou (x_1, x_2, x_3). Rovnice
$$x_4 = 0$$
je **rovnice nadroviny**. Množina ν se proto nazývá **nevlastní nadrovina** prostoru $\overline{\mathbb{E}}_3$.

Afinita v prostoru, jak už jsme uvedli, je dána rovnicí (4), nebo-li

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

pro zobrazení bodů, resp.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

pro zobrazení vektorů. Obě tyto rovnice můžeme pomocí homogenních souřadnic zapsat jednou rovnicí ve tvaru

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & b_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & b_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & b_3 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ k \end{pmatrix}, \tag{9}$$

kde je $k = 1$, zobrazujeme-li vlastní bod a $k = 0$ při zobrazování nevlastních bodů, tj. vektorů.

Rovnice (9) v homogenních souřadnicích je speciálním případem rovnice

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Zobrazení popsané touto rovnicí se nazývá **kolineace**.

Vlastní bod, jehož obrazem, resp. vzorem, je nevlastní bod, se nazývá **úběžník**. Rovnicí
$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = 0$$
je určena rovina, jejímž obrazem je nevlastní rovina $x_4' = 0$. Taková rovina se nazývá první **úběžnicová rovina** prostoru vzorů, v matematické optice se nazývá **ohnisková rovina** předmětová.

V kartézských souřadnicích mají rovnice (10) tvar

$$x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}},$$

$$y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}}, \tag{11}$$

$$z' = \frac{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}}{a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}}.$$

Inverzní zobrazení ke kolineaci je opět kolineace. Označíme-li prvky inverzní matice b_{ij}, existuje zřejmě v obrazovém prostoru druhá úběžnicová rovina

$$b_{41}x'_1 + b_{42}x'_2 + b_{43}x'_3 + b_{44}x'_4 = 0,$$

která je obrazem nevlastní roviny $x_4 = 0$ z prostoru vzorů.

Redukcemi ohniskových rovin a ohnisek, úběžníků ortogonálních paprsků k ohniskovým rovinám, se redukují zobrazovací rovnice (11) na jednodušší tvar, např. Newtonův

$$x' = \frac{a}{x}, \; y' = \frac{by}{x}, \; z' = \frac{cz}{x}.$$

Bilineární forma

Nechť $\mathbb{V}$ je vektorový prostor. Zobrazení $F\colon \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$, pro které platí

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z}) &= F(\mathbf{x},\mathbf{z}) + F(\mathbf{y},\mathbf{z}),\\ F(\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z}) &= F(\mathbf{x},\mathbf{y}) + F(\mathbf{x},\mathbf{z}),\\ F(\alpha\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \alpha F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = F(\mathbf{x},\alpha\mathbf{y}) \end{aligned} \tag{12}$$

pro každé $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{V}$ a každé $\alpha \in \mathbb{R}$, se nazývá **bilineární forma** na vektorovém prostoru $\mathbb{V}$.

Příklad 8.

a) *Skalární součin dvou vektorů* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *z vektorového prostoru* $\mathbb{V}$ *je bilineární forma na* $\mathbb{V}$.

b) *Je-li* $\mathbf{a} \in \mathbb{V}_3$ *pevný vektor, potom vnější součin* $(\mathbf{a},\mathbf{x},\mathbf{y})$, *tj. determinant ze souřadnic vektorů* $\mathbf{a},\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{V}_3$ *ve zvolené bázi, je bilineární forma na* $\mathbb{V}_3$.

Nechť $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ je báze vektorového prostoru $\mathbb{V}$ a

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i\,,\; \mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j\mathbf{e}_j. \tag{13}$$

Potom podle (12) je

$$F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = F\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j\mathbf{e}_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j F(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j =$$

$$= (x_1,\ldots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11}, & \ldots & , a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & \ldots & , a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \tag{14}$$

kde čísla $a_{ij} = F(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)$ se nazývají **koeficienty bilineární formy**. Matice (a_{ij}) se nazývá **matice bilineární formy**.

Příklad 9. *Napište matici bilineární formy při změně báze.*

Příklad 10.
a) *Matice kanonického skalárního součinu je jednotková.*
b) *Je-li* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *pevný vektor a vektory* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *mají vyjádření (13) pro* $n = 3$, *potom*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\mathbf{a}, \sum_{i=1}^{3} x_i \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^{3} y_j \mathbf{e}_j\right) = \sum_{i=1}^{3} x_i \sum_{j=1}^{3} y_j (\mathbf{a}, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j).$$

Zřejmě platí

$$(\mathbf{a}, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = 0\,,\ (\mathbf{a}, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = -(\mathbf{a}, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i).$$

Odtud pro koeficienty této bilineární formy dostáváme

$$a_{ij} = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = -a_{ji}.$$

Matice této bilineární formy je

$$\begin{pmatrix} 0, & a_3, & -a_2 \\ -a_3, & 0, & a_1 \\ a_2, & -a_1, & 0 \end{pmatrix}.$$

Jestliže pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$ platí

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F(\mathbf{y}, \mathbf{x}),$$

nazývá se F **symetrická bilineární forma**.

Zřejmě skalární součin je symetrická bilineární forma.

Jestliže pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$ platí

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -F(\mathbf{y}, \mathbf{x}),$$

nazývá se F **antisymetrická bilineární forma**.

Zřejmě bilineární forma z příkladu 10 b) je antisymetrická bilineární forma.

Příklad 11. *Ukažte, že bilineární forma* F_s, *resp.* F_a, *daná rovnicí*

$$F_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + F(\mathbf{y}, \mathbf{x}))\,,\ \textit{resp.}\ F_a(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - F(\mathbf{y}, \mathbf{x}))$$

je symetrická, resp. antisymetrická.

Kvadratická forma

Zobrazení $F_2\colon \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ se nazývá **kvadratická forma**, jestliže existuje bilineární forma F taková, že pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$ je $F_2(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

Z příkladu 11 vyplývá, že ke každé kvadratické formě F_2 existuje symetrická bilineární forma F, taková že $F_2(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Tato bilineární forma, se nazývá **polární bilineární forma** kvadratické formy F_2. V prostoru $\mathbb{R}^3$ má podle (14) kvadratická forma vyjádření

$$F_2(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{13}, & a_{32}, & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

tj.

$$F_2(\mathbf{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2.$$

Kvadratická forma F_2 se nazývá

- pozitivně definitní, právě když pro každý vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ je $F_2(\mathbf{x}) > 0$,
- negativně definitní, právě když pro každý vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ je $F_2(\mathbf{x}) < 0$,
- negativně semidefinitní, právě když pro každý vektor $\mathbf{x}$ je $F_2(\mathbf{x}) \leq 0$,
- pozitivně semidefinitní, právě když pro každý vektor $\mathbf{x}$ je $F_2(\mathbf{x}) \geq 0$.

Hlavní směry symetrické bilineární formy

Je-li F symetrická bilineární forma, potom směry určené vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ nazýváme **sdružené směry** vzhledem k formě F, právě když

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0.$$

Směr určený vektorem $\mathbf{u}$ se nazývá **hlavní směr** vzhledem k symetrické bilineární formě F, jestliže je sdružený s každým směrem $\mathbf{x}$, který je k němu kolmý. Je-li g skalární součin, tj. symetrická bilineární forma, která určuje pozitivně definitní kvadratickou formu, potom ortogonální jsou ty směry $\{\mathbf{u}\}$, $\{\mathbf{x}\}$, pro které platí

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = 0.$$

Tudíž vektor $\mathbf{u}$ určuje hlavní směr, právě když z rovnosti $g(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = 0$ plyne rovnost $F(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = 0$.

Jestliže pro směr $\{\mathbf{u}\}$ toto platí, existuje reálné číslo λ takové, že

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = \lambda g(\mathbf{u}, \mathbf{x}). \tag{15}$$

V prostoru $\mathbb{R}^2$ má rovnice (15), vzhledem k ortonormální bázi, tvar

$$\mathbf{x} \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{12}, & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathbf{x} \begin{pmatrix} \lambda, & 0 \\ 0, & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Nebo-li

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda, & a_{12} \\ a_{12}, & a_{22}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Rovnice (16) má nenulové řešení, jestliže determinant matice soustavy (16) je roven nule, tj. λ je řešením kvadratické rovnice

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0. \tag{17}$$

Diskriminant rovnice (17) je

$$D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0.$$

Rovnice (17) má pouze reálné kořeny, a to

- je-li $a_{11} \neq a_{22}$, nebo $a_{12} \neq 0$, je $D > 0$ a existují dva různé kořeny λ_1, λ_2. Odpovídající hlavní směry $\{\mathbf{u}_1\}$, $\{\mathbf{u}_2\}$ jsou kolmé.
- je-li $a_{11} = a_{22}$ a zároveň $a_{12} = 0$, je $D = 0$ a existuje jeden kořen $\lambda = a_{11}$. Matice soustavy (16) je nulová, každý směr je hlavní.

Hlavní směr $\{\mathbf{u}\}$ symetrické bilineární formy je vlastně vlastní vektor její matice příslušný vlastnímu číslu λ.

Z rovnice (15) pro vlastní vektor (hlavní směr) $\mathbf{u}$ a vlastní číslo λ vyplývá

$$\lambda = \frac{F(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{g(\mathbf{u}, \mathbf{u})} = \frac{F_2(\mathbf{u})}{||\mathbf{u}||^2}. \tag{18}$$

Pro vlastní čísla a vlastní vektory **symetrických matic** platí:

Všechna vlastní čísla jsou reálná.

Různým vlastním číslům odpovídající vlastní vektory jsou ortogonální.

Kuželosečky

Každou kuželosečku v rovině lze popsat kvadratickou rovnicí

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{19}$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, 3$.

Použijeme-li homogenní souřadnice (x_1, x_2, x_3), kde $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$, pro $x_3 \neq 0$, má rovnice (19) tvar

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0,$$

nebo-li v maticovém tvaru

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0, \tag{20}$$

nebo symbolicky $\mathbf{x}\,\mathbb{A}\,\mathbf{x}^T = 0$. Říkáme, že kuželosečka je nulovou množinou kvadratické formy na $\mathbb{R}^3$.

Je-li matice $\mathbb{A}$ singulární (její determinant je roven nule), je **kuželosečka singulární**. Rovnicí (19) jsou určeny jedna nebo dvě přímky, jeden bod, nebo prázdná množina.

Je-li matice $\mathbb{A}$ regulární (její determinant je různý od nuly), je **kuželosečka regulární**. Rovnicí (19) je určena elipsa, hyperbola, parabola nebo prázdná množina.

Lineární členy $2a_{13}x$, resp. $2a_{23}y$ v rovnici (19) představují posunutí kuželosečky ve směru osy x, resp. osy y. Hledejme vektor posunutí $S - O = (m, n)$. Použijeme homogenní souřadnice středu S kuželosečky, tj. $S = (m, n, 1)$, potom posunutí je dáno rovnicí

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & m \\ 0, & 1, & n \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \text{ nebo-li } \mathbf{x}^T = \mathbb{P}\,\mathbf{x}'^T. \tag{21}$$

Dosazením do rovnice (20) dostaneme rovnici $\mathbf{x}'\mathbb{P}^T\mathbb{A}\mathbb{P}\,\mathbf{x}'^T = 0$. Výsledná matice je

$$\mathbb{A}' = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{11}m + a_{12}n + a_{13} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{12}m + a_{22}n + a_{23} \\ a_{11}m + a_{12}n + a_{13}, & a_{12}m + a_{22}n + a_{23}, & a'_{33} \end{pmatrix},$$

kde jsme označili $a'_{33} = (a_{11}m + a_{12}n + a_{13})m + (a_{12}m + a_{22}n + a_{23})n + a_{13}m + a_{23}n + a_{33}$.

Kuželosečka s transformovanou maticí $\mathbb{A}'$ bude mít střed S v počátku, jestliže $a'_{13} = a'_{23} = 0$, tj.

$$\begin{aligned} a_{11}m + a_{12}n + a_{13} &= 0, \\ a_{12}m + a_{22}n + a_{23} &= 0. \end{aligned}$$

Soustavu rovnic pro neznámé m, n budeme řešit, za předpokladu

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{12}, & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

Cramerovým pravidlem:

$$m = -\frac{\begin{vmatrix} a_{13}, & a_{12} \\ a_{23}, & a_{22} \end{vmatrix}}{A_{33}}, \quad n = -\frac{\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{13} \\ a_{12}, & a_{23} \end{vmatrix}}{A_{33}}.$$

Porovnáme-li nalezené řešení s maticí $\mathbb{A}$, vidíme, že determinanty 2. řádu ve zlomcích jsou algebraické doplňky A_{3i} prvků a_{3i} třetího řádku matice $\mathbb{A}$. Tedy

$$m = \frac{A_{31}}{A_{33}}, \quad n = \frac{A_{32}}{A_{33}}.$$

Algebraické doplňky třetího řádku jsou homogenní souřadnice středu kuželosečky

$$S = (A_{31}, A_{32}, A_{33}).$$

Je-li $A_{33} \neq 0$, je regulární kuželosečka, daná rovnicí (18) **středová kuželosečka**, tj. elipsa, hyperbola, nebo prázdná množina. Je-li $A_{33} = 0$, je regulární kuželosečka parabola.

Po provedeném posunutí (21) na kuželosečku (20), má její rovnice tvar

$$(x_1', x_2', x_3') \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & 0 \\ a_{12}, & a_{22}, & 0 \\ 0, & 0, & a_{33}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = 0. \tag{22}$$

Abychom zjistili jaká kuželosečka je rovnicí (22) určena, musíme soustavu souřadnic $\langle S, x', y' \rangle$ otočit do os kuželosečky. To bychom mohli udělat stejně jako jsme určili posunutí, tj. vynásobit matici $\mathbb{A}'$ maticí rotace. Jednodušší bude určit hlavní směry (vlastní vektory) matice kuželosečky.

Hledáme takový směr $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)$, který je sdružený vzhledem k matici $\mathbb{A}'$, (resp. $\mathbb{A}$), s každým ortogonálním k němu směrem $\mathbf{x} = (x_1, x_2, 0)$, tj.

$$(x_1, x_2, 0) \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & 0 \\ a_{12}, & a_{22}, & 0 \\ 0, & 0, & a_{33}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda (x_1, x_2, 0)(u_1, u_2, 0)^T.$$

Nebo-li

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda, & a_{12} \\ a_{12}, & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Charakteristická rovnice vlastních čísel $\mathbb{A}'$ je kvadratická a pro regulární kuželosečku má dvě různá reálná řešení λ_1, λ_2. Je-li

- $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, je kuželosečka elipsa, nebo prázdná množina,
- $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, je kuželosečka hyperbola,
- $\lambda_1 \lambda_2 = 0$, je kuželosečka parabola.

V kartézské soustavě souřadnic $\langle S, \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}, \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} \rangle$, určené vlastními vektory, její matice $\mathbb{B}$ je diagonální, její prvky jsou podle (18) (F_2 je kvadratická forma z rovnice (20))

$$b_{11} = \tfrac{1}{\|\mathbf{u}_1\|^2} F_2(\mathbf{u}_1) = \lambda_1, \quad b_{22} = \tfrac{1}{\|\mathbf{u}_2\|^2} F_2(\mathbf{u}_2) = \lambda_2, \quad b_{33} = \tfrac{|\mathbb{A}|}{A_{33}}.$$

Tedy její rovnice v homogenních souřadnicích je

$$\lambda_1 \overline{x}_1^2 + \lambda_2 \overline{x}_2^2 + \tfrac{|\mathbb{A}|}{A_{33}} \overline{x}_3^2 = 0. \tag{23}$$

Příklad 12. *Ukážeme, že rovnicí*

$$2x^2 - xy - 5x - y^2 + 2y + 3 = 0$$

je dána singulární kuželosečka, a to kuželosečka složená ze dvou různoběžných přímek.

Danou rovnici přepíšeme do homogenních souřadnic a vypočítáme determinant matice kvadratické formy, která kuželosečku určuje:

$$2x_1^2 - x_1x_2 - 5x_1x_3 - x_2^2 + 2x_2x_3 + 3x_3^2 = 0,$$

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 2, & -\frac{1}{2}, & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2}, & -1, & 1 \\ -\frac{5}{2}, & 1, & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0. \tag{24}$$

Determinant matice kvadratické formy vypočítáme rozvojem podle třetího řádku

$$-\frac{5}{2}\cdot\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}, & -\frac{5}{2} \\ -1, & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\frac{5}{2}, & 2 \\ 1, & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2, & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}, & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Determinant je roven nule, kuželosečka je singulární. Algebraické doplňky (determinanty 2. řádu) určují homogenní souřadnice středu kuželosečky, je to bod

$$S = (-3, -\tfrac{3}{4}, -\tfrac{9}{4}).$$

Snadno se přesvědčíme, že tento bod vyhovuje rovnici (24), tj. leží na kuželosečce. Tedy kuželosečka bude složena ze dvou různoběžných přímek. Jejich směrové vektory určíme jako průsečíky kuželosečky s nevlastní přímkou $x_3 = 0$ roviny. Dosazením $x_3 = 0$ do rovnice (24) dostáváme kvadratickou rovnici

$$2x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 = 0$$

pro hledané průsečíky. Řešením kvadratické rovnice, např. pro x_1/x_2 dostáváme

$$\frac{x_1}{x_2} = 1, \text{ nebo } \frac{x_1}{x_2} = -\frac{1}{2}.$$

Směrové vektory přímek jsou

$$\mathbf{u} = (1, 1), \text{ nebo } \mathbf{v} = (1, -2).$$

Kuželosečka je tedy složena ze dvou různoběžek se směrovými vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ a společným bodem $S = [\frac{4}{3}, \frac{1}{3}]$:

$$x - y - 1 = 0, \quad 2x + y - 3 = 0.$$

Příklad 13. *Rovnici*

$$2x^2 + 4xy + 5y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$$

přepíšeme do homogenních souřadnic

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 2, & 2, & -1 \\ 2, & 5, & 2 \\ -1, & 2, & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Determinant matice kuželosečky, rozvinutý podle třetího řádku, je

$$-1 \cdot \begin{vmatrix} 2, & -1 \\ 5, & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} -1, & 2 \\ 2, & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2, & 2 \\ 2, & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

Algebraické doplňky třetího řádku určují homogenní souřadnice středu kuželosečky, resp. jeho kartézské souřadnice

$$S = (9, -6, 6)\,, \text{ resp. } S = [\tfrac{3}{2}, -1].$$

Pro hlavní směry, směry os kuželosečky, určíme vlastní čísla matice

$$\begin{pmatrix} 2, & 2 \\ 2, & 5 \end{pmatrix}.$$

Řešíme kvadratickou rovnici

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda, & 2 \\ 2, & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{25}$$

Charakteristická rovnice (25), tj. rovnice $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$, *má dva kořeny,* $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 1$. *Vlastní (hlavní směry) vektory, odpovídající těmto vlastním číslům, jsou řešením soustavy homogenních rovnic*

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_i, & 2 \\ 2, & 5-\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0\,, \ i = 1, 2.$$

Jsou to vektory $\mathbf{u}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (2, -1)$.

Podle (23) rovnice kuželosečky, v bázi určené vlastními vektory, v homogenních, resp. kartézských souřadnicích, je

$$6\,\overline{x}_1{}^2 + \overline{x}_2{}^2 - \tfrac{1}{2}\,\overline{x}_3{}^2 = 0\,, \text{ resp. } 12\,\overline{x}^2 + 2\,\overline{y}^2 = 1.$$

Příklad 14. *Rovnici*

$$x^2 + 6xy + 9y^2 + 2y - 1 = 0$$

přepíšeme do homogenních souřadnic

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1, & 3, & 0 \\ 3, & 9, & 1 \\ 0, & 1, & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Determinant matice kuželosečky, rozvinutý podle třetího řádku, je

$$0 \cdot \begin{vmatrix} 3, & 0 \\ 9, & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 3 \end{vmatrix} + -1 \cdot \begin{vmatrix} 1, & 3 \\ 3, & 6 \end{vmatrix} = -1.$$

Determinant je nenulový, kuželosečka je regulární. Algebraický doplněk $A_{33} = 0$, *kuželosečka je parabola. Směr její osy (nevlastní bod paraboly) je určen vektorem, jehož souřadnice jsou algebraické doplňky 3. řádku* $(3, -1, 0)$.

Charakteristická rovnice vlastních čísel je

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda, & 3 \\ 3, & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0\,, \ \ tj.\ \lambda(\lambda-10)=0.$$

Vlastnímu číslu $\lambda_1 = 0$ *odpovídá jednotkový vlastní vektor* $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(3,-1)$ *(směr osy paraboly).*

Vlastnímu číslu $\lambda_2 = 10$ *odpovídá jednotkový vlastní vektor* $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)$ *(vlastní vektory symetrických matic jsou ortogonální).*

Ortonormální vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ *doplníme na bázi prostoru, např. vektorem* $\mathbf{u}_3 = (a_1, a_2, 1)$*, který určuje vrchol* $A = [a_1, a_2]$ *paraboly. V této bázi potom napíšeme rovnici paraboly.*

Vrchol A *určíme jako průsečík paraboly s její osou. K ose je kolmý vektor* $\mathbf{u}_2$*, její obecná rovnice bude*

$$(1,3,0)\begin{pmatrix} 1, & 3, & 0 \\ 3, & 9, & 1 \\ 0, & 1, & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0\,, \ \ tj.\ 10x_1 + 30x_2 + 3x_3 = 0$$

v homogenních souřadnicích a v kartézských souřadnicích pak $10x+30y+3=0$*. Průsečík této osy s parabolou je bod* A *s homogenními souřadnicemi*

$$\mathbf{u}_3 = (-\tfrac{333}{200}, \tfrac{91}{200}, 1).$$

Potom rovnice paraboly v bázi $\mathbf{u}_1$*,* $\mathbf{u}_2$*,* $\mathbf{u}_3$ *je určena koeficienty*

$$b_{11} = \lambda_1 = 0\,, \ b_{22} = \lambda_2 = 10\,, \ b_{13} = \mathbf{u}_1\,\mathbb{A}\,\mathbf{u}_3^T = -\frac{1}{\sqrt{10}}\,, \ b_{33} = \mathbf{u}_3\,\mathbb{A}\,\mathbf{u}_3^T = 0,$$

tedy

$$10\,\overline{x}_2^2 - \frac{2}{\sqrt{10}}\,\overline{x}_1\,\overline{x}_3 = 0\,, \ \ tj.\ y^2 = \frac{\sqrt{10}}{50}\,x.$$

Kvadratický funkcionál

Numerické řešení soustavy lineárních rovnic

Mějme pro názornost soustavu dvou lineárních algebraických rovnic

$$2x - y - 3 = 0\,, \quad -x + 3y - 2 = 0. \tag{1}$$

Její řešení je bod $S = [\frac{11}{5}, \frac{7}{5}]$ (průsečík přímek daných rovnicemi (1)).

Na obě rovnice (1) můžeme pohlížet jako na nulové vrstevnice lineárních funkcí

$$f_x(x,y) = 2x - y - 3\,, \quad f_y(x,y) = -x + 3y - 2. \tag{2}$$

Na funkce (2) můžeme pohlížet jako na parciální derivace nějaké kvadratické funkce $z = f(x, y)$. Pro tuto funkci potom platí

$$f(x, y) = \int (2x - y - 3)dx + C(y),$$

kde $C(y)$ je nějaká funkce proměnné y. Integrováním dostaneme

$$f(x, y) = x^2 - xy - 3x + C(y). \tag{3}$$

Pro funkci f máme ještě druhou podmínku ve (2), kterou porovnáme s parciální derivací funkce ve (3):

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -x + C'(y) = -x + 3y - 2.$$

Odtud

$$C'(y) = 3y - 2\,, \text{ nebo-li } C(y) = \frac{}{3}2y^2 - 2y + c,$$

kde c je integrační konstanta. Např. pro $c = 0$ dostáváme pro funkci f vyjádření

$$f(x, y) = x^2 - xy - 3x + \tfrac{3}{2}y^2 - 2y. \tag{4}$$

Vrstevnice funkce f, o nulové kótě, je elipsa procházející počátkem (odůvodněte!). Její rovnice v homogenních souřadnicích je

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1, & -\frac{1}{2}, & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2}, & \frac{3}{2}, & -1 \\ -\frac{3}{2}, & -1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0. \tag{5}$$

Střed S elipsy (4) má homogenní souřadnice $(\frac{11}{4}, \frac{7}{4}, \frac{5}{4})$ a příslušné kartézské souřadnice jsou $[\frac{11}{5}, \frac{7}{5}]$. Střed S je kolmý průmět, do roviny xy, vrcholu eliptického paraboloidu, který je grafem kvadratické funkce f. Zároveň je to hledané řešení soustavy (1).

Přejděme v rovnici (5) zpět ke kartézským souřadnicím, tj. vydělíme rovnici $x_3^2 \neq 0$, pak $(x_1, x_2, x_3) = x_3(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1) = x_3(x, y, 1)$ a v rovnici (5) proveďme násobení. Rovnice (5) bude mít tvar

$$(x - \tfrac{1}{2}y - \tfrac{3}{2})x + (-\tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2}y - 1)y - (\tfrac{3}{2}x + y) \cdot 1 = 0.$$

Vynásobíme-li rovnici dvěma a přepíšeme pomocí matic, dostáváme

$$\tfrac{1}{2}(x, y) \begin{pmatrix} 2, & -1 \\ -1, & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (x, y) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0. \tag{6}$$

Abychom lépe viděli význam rovnice (6), přepíšeme ji a soustavu (1) do symbolického maticového zápisu

$$\frac{1}{2}\,\mathbf{x}\,\mathbb{A}\mathbf{x}^T - \mathbf{x}\,\mathbf{b}^T = 0\,, \text{kde} \quad \mathbb{A}\mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T.$$

Můžeme říci, že řešení soustavy lineárních algebraických rovnic $\mathbb{A}\mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T$ je minimem kvadratické funkce

$$f(\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\,\mathbf{y}\,\mathbb{A}\,\mathbf{y}^T - \mathbf{y}\,\mathbf{b}^T.$$

Podle uvedeného příkladu soustavy (1) bychom mohli usoudit, že problém řešení soustavy lineárních algebraických rovnic můžeme převést na problém hledání minima kvadratické funkce. Tuto doměnku se pokusíme ozřejmit na základě vlastností bilineární formy. Všechny další úvahy a výpočty budeme provádět v prostoru uspořádaných n-tic reálných čísel. Stejným symbolem, tučným malým písmenkem, budeme popisovat jak vektory, tak body, jako n-tice reálných čísel.

Nechť F je bilineární forma na prostoru $\mathbb{R}^n$. Potom

$$F(\mathbf{y}-\mathbf{x},\mathbf{y}-\mathbf{x}) = F(\mathbf{y},\mathbf{y}) - F(\mathbf{y},\mathbf{x}) - F(\mathbf{x},\mathbf{y}) + F(\mathbf{x},\mathbf{x}).$$

Je-li F symetrická bilineární forma, je

$$F_2(\mathbf{y}-\mathbf{x}) = F_2(\mathbf{y}) - 2F(\mathbf{x},\mathbf{y}) + F_2(\mathbf{x}). \tag{7}$$

Odtud dostáváme

$$F_2(\mathbf{y}) - 2F(\mathbf{x},\mathbf{y}) = F_2(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - F_2(\mathbf{x}).$$

Pro každé $\mathbf{x}$ pevné, definujme funkci

$$f(\mathbf{y}) = \tfrac{1}{2}F_2(\mathbf{y}) - F(\mathbf{x},\mathbf{y}). \tag{8}$$

Podle (7) je $f(\mathbf{y})$ minimální právě když $\mathbf{y}=\mathbf{x}$, tj.

$$f(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n} f(\mathbf{y}).$$

Ve zvolené bázi $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ má (8) tvar

$$f(\mathbf{y}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{y}\,\mathbb{A}\,\mathbf{y}^T - \mathbf{y}\,\mathbf{b}^T,$$

kde $\mathbb{A}$ je matice symetrické bilineární formy F s pozitivně definitní kvadratickou formou F_2.

Jestliže $\mathbf{x}^*$ je řešení soustavy $\mathbb{A}\mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T$, potom pro aproximaci $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \mathbf{v}$, kde $\mathbf{v}$ je vektor oprav, je

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{x}^*+\mathbf{v})\,\mathbb{A}(\mathbf{x}^*+\mathbf{v})^T - (\mathbf{x}^*+\mathbf{v})\,\mathbf{b}^T = \tfrac{1}{2}(\mathbf{x}^*+\mathbf{v})(\mathbf{b}^T+\mathbb{A}\mathbf{v}^T) - (\mathbf{x}^*+\mathbf{v})\mathbf{b}^T = \\ &= -\tfrac{1}{2}\,\mathbf{x}^*\mathbf{b}^T + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{v}\,\mathbb{A}\,\mathbf{v}^T. \end{aligned}$$

Odtud, vzhledem k tomu, že

$$f(\mathbf{x}) + \tfrac{1}{2}\,\mathbf{x}^*\mathbf{b}^T = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{v}\,\mathbb{A}\,\mathbf{v}^T \ge 0,$$

má funkce f minimum v bodě $\mathbf{x}^*$ právě když $\mathbf{v} = \mathbf{o}$.

Jacobiova metoda

je nejjednodušší iterační metoda pro řešení soustavy $\mathbb{A}\mathbf{x}^T = \mathbf{b}^T$. Kvadratickou funkci f zúžíme na funkci $\overline{f}$ jedné proměnné $t = x_i$, podle které budeme parciálně derivovat:

$$\overline{f}(t) = f(x_1,\ldots,x_{i-1},t,x_{i+1},\ldots,x_n) = \tfrac{1}{2}a_{ii}t^2 + t\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}x_j - b_i t + c.$$

Potom

$$\overline{f}'(t) = a_{ii}t + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j - b_i = 0$$

je rovnice pro i-tou souřadnici bodu, ve kterém má funkce f extrém, tj.

$$t = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j \right).$$

Označíme-li $t = x_i^{(k+1)}$ pro i-tou souřadnici aproximace $\mathbf{x}^{(k+1)}$, dostáváme iterační vzorec pro Jacobiovu iterační metodu:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j \right), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Z geometrického hlediska, funkce f má extrémy v nadrovinách $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$.

Použití vzorce (9) ukážeme na soustavě uvedené v úvodu odstavce. Danou soustavu nejdříve upravíme podle vzorce (9) na iterační tvar

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3}, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{(k)}. \tag{10}$$

Zvolíme nultou aproximaci, např. $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0)$. Potom podle (10) postupným výpočtem dostáváme posloupnost bodů

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(1)} &= (\tfrac{3}{2}, \tfrac{2}{3}) \doteq (1.5, 0.\overline{6}) \\
\mathbf{x}^{(2)} &= (\tfrac{11}{6}, \tfrac{7}{6}) \doteq (1.8\overline{3}, 1.1\overline{6}) \\
\mathbf{x}^{(3)} &= (\tfrac{25}{12}, \tfrac{23}{18}) \doteq (2.08\overline{3}, 1.2\overline{7}) \\
\mathbf{x}^{(4)} &= (\tfrac{77}{36}, \tfrac{49}{36}) \doteq (2.13\overline{8}, 1.36\overline{1}) \\
\mathbf{x}^{(5)} &= (\tfrac{157}{72}, \tfrac{149}{108}) \doteq (2.180\overline{5}, 1.3796)
\end{aligned}$$

atd. Přesné řešení je $\mathbf{x}^* = (\frac{11}{5}, \frac{7}{5}) = (2.2, 1.4)$.

Gaussova-Seidelova metoda

vychází z Jacobiovy iterační metody. Hodnoty i-té souřadnice, vypočítané v $(k+1)$ aproximaci, využívá k výpočtu $(i+1)$ souřadnice této aproximace, atd. Iterační vzorec je

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} \right).$$

Pro danou soustavu, při stejné nulté aproximaci jako u Jacobiovy metody, potom první tři aproximace jsou

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(1)} &= (\tfrac{3}{2}, \tfrac{7}{6}) \doteq (1.5, 1.1\overline{6}) \\
\mathbf{x}^{(2)} &= (\tfrac{25}{12}, \tfrac{49}{36}) \doteq (2.08\overline{3}, 1.36\overline{1}) \\
\mathbf{x}^{(3)} &= (\tfrac{157}{72}, \tfrac{301}{216}) \doteq (2.180\overline{5}, 1.3935)
\end{aligned}$$

atd.

Metoda největšího spádu

U funkce více proměnných, kromě parciálních derivací, jsme v bodě definovali derivaci v libovolném jednotkovém směru. Ukázali jsme, že směr, ve kterém je derivace extremální, je gradient funkce. Z těchto poznatků vychází metoda největšího spádu.

Hledáme extrém funkce

$$f(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{x}\,\mathbb{A}\,\mathbf{x}^T - \mathbf{x}\,\mathbf{b}^T$$

v bodě $\mathbf{x}_0$ ve směru $\mathbf{v}_0$. Ten bude ve směru gradientu, tj. vektoru, jehož souřadnice jsou parciální derivace funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$:

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = \mathbb{A}\,\mathbf{x_0}^T - \mathbf{b}^T,$$

označíme jej $-\mathbf{r_0}^T$ a nazveme reziduum.

Funkci f zúžíme na body přímky

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \alpha\,\mathbf{v}_0. \tag{11}$$

Potom

$$\begin{aligned}
\overline{f}(\alpha) &= f(\mathbf{x}_0 + \alpha\,\mathbf{v}_0) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{x}_0 + \alpha\,\mathbf{v}_0)\,\mathbb{A}\,(\mathbf{x}_0 + \alpha\,\mathbf{v}_0)^T - (\mathbf{x}_0 + \alpha\,\mathbf{v}_0)\,\mathbf{b}^T, \\
\overline{f}'(\alpha) &= \mathbf{v}_0\,\mathbb{A}\,(\mathbf{x}_0 + \alpha\,\mathbf{v}_0)^T - \mathbf{v}_0\,\mathbf{b}^T.
\end{aligned}$$

Derivace bude nulová, právě když

$$\alpha = \frac{\mathbf{v}_0\mathbf{b}^T - \mathbf{v}_0\mathbb{A}\,\mathbf{x_0}^T}{\mathbf{v}_0\mathbb{A}\,\mathbf{v_0}^T} = \frac{\mathbf{v}_0(\mathbf{b}^T - \mathbb{A}\,\mathbf{x}_0)}{\mathbf{v}_0\mathbb{A}\,\mathbf{v_0}^T}.$$

Po dosazení do čitatele zlomku rezidua dostáváme

$$\alpha = \frac{\mathbf{v}_0\mathbf{r}_0^T}{\mathbf{v}_0\mathbb{A}\,\mathbf{v_0}^T}. \tag{12}$$

Extrém funkce f ve směru $\mathbf{v}_0$ je v bodě (podle(11))

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \frac{\mathbf{v}_0\mathbf{r}_0^T}{\mathbf{v}_0\mathbb{A}\,\mathbf{v_0}^T}\mathbf{v}_0. \tag{13}$$

Protože derivace je extremální ve směru gradientu, je $\mathbf{v}_0 = -\mathbf{r}_0$. Potom $(k+1)$ bod, ve kterém má funkce f extrém, je

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \frac{\mathbf{r}^{(k)}\mathbf{r}^{(k)T}}{\mathbf{r}^{(k)}\mathbb{A}\,\mathbf{r}^{(k)T}}\mathbf{r}^{(k)}.$$

Metoda největšího spádu je příliš závislá na volbě počáteční podmínky a při nevhodné volbě nemusí konvergovat k předpokládanému řešení. Tato metoda se využívá k odvození k další metodě.

Metoda sdružených gradientů

Minimalizujeme funkci f ve směrech $\mathbf{v}$ určených ortogonalizací reziduí vzhledem ke skalárnímu součinu, který je dán pozitivně definitní maticí $\mathbb{A}$, tj.

$$\mathbf{v}^{(i)} \perp \mathbf{v}^{(j)}\,,\ i \neq j \Longleftrightarrow \mathbf{v}^{(i)}\mathbb{A}\,\mathbf{v}^{(j)T} = 0.$$

Počáteční aproximací je bod $\mathbf{x}^{(0)}$. Počáteční směr je

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b}^T - \mathbb{A}\,\mathbf{x}^{(0)T}.$$

Odtud podle (12) a (13) je

$$\alpha^{(0)} = \frac{\mathbf{v}^{(0)}\,\mathbf{r}^{(0)}}{\mathbf{v}^{(0)}\mathbb{A}\,\mathbf{v}^{(0)}}\,,\ \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \alpha^{(0)}\mathbf{v}^{(0)T}\,,\ \mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{r}^{(0)} - \alpha^{(0)}\mathbb{A}\,\mathbf{v}^{(0)T}.$$

Potom ortogonální vektor $\mathbf{v}^{(1)}$ k vektoru $\mathbf{v}^{(0)}$ je

$$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{r}^{(1)} + \beta^{(1)}\,\mathbf{v}^{(0)} \implies 0 = \mathbf{r}^{(1)}\mathbb{A}\,\mathbf{v}^{(0)T} + \beta^{(1)}\mathbf{v}^{(0)}\mathbb{A}\,\mathbf{v}^{(0)T}$$

$$\beta^{(1)} = -\frac{\mathbf{r}^{(1)}\mathbb{A}\,\mathbf{v}^{(0)T}}{\mathbf{v}^{(0)}\mathbb{A}\,\mathbf{v}^{(0)T}},$$

$$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{r}^{(1)} - \frac{\mathbf{r}^{(1)}\mathbb{A}\,\mathbf{v}^{(0)T}}{\mathbf{v}^{(0)}\mathbb{A}\,\mathbf{v}^{(0)T}}\mathbf{v}^{(0)}.$$

Nyní vypočítáme

$$\alpha^{(1)} = \frac{\mathbf{v}^{(1)}\,\mathbf{r}^{(1)T}}{\mathbf{v}^{(1)}\mathbb{A}\,\mathbf{v}^{(1)T}}\,,\ \mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + \alpha^{(1)}\mathbf{v}^{(1)}\,,\ \mathbf{r}^{(2)} = \mathbf{r}^{(1)} - \alpha^{(1)}\mathbb{A}\,\mathbf{v}^{(1)T},$$

atd.

Metoda sdružených gradientů po konečně mnoha krocích (k krocích) dojde k přesnému (až na zaokrouhlovací chyby) řešení. Ukážeme na příkladu. Soustava

$$\begin{pmatrix} 4, & -1, & 0 \\ -1, & 4, & -1 \\ 0, & -1, & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

má řešení $(1, 2, 1)$.

Podle předchozích vzorců, zvolíme počáteční aproximaci $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)$, potom

$$\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)} = (2, 6, 2) = 2(1, 3, 1)\,,\ \alpha^{(0)} = \tfrac{11}{32}$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = \tfrac{11}{16}(1, 3, 1)\,,$$

$$\mathbf{r}^{(1)} = \tfrac{7}{16}(3, -2, 3)\,,\ \beta^{(1)} = \tfrac{49}{512}\,,\ \mathbf{v}^{(1)} = \tfrac{77}{256}(5, -1, 5)\,,\ \alpha^{(1)} = \tfrac{16}{77}$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = (1, 2, 1).$$

Žádná metoda není univerzální, vždy existují příklady, na které je ta či jiná metoda nevhodná. Proto se hledají stále další a další metody řešení a také podmínky, za kterých je vhodné metodu použít. O tom ale v knihách věnovaných numerickým metodám.