

Redukce délek

Pavel Tesař

31. března 2007

Obsah

1	Redukce délek obecně	2
2	Fyzikální redukce	2
2.1	Výpočet pomocí Bairell - Seearsova vzorce	2
2.2	Výpočet pomocí tabulek, nomogramů a rotogramů	4
2.2.1	Tabulka pro EOK 2000	4
2.2.2	Nomogram pro AGA 6A	5
2.2.3	Rotogram pro AGA 700	5
2.3	Firemní rovnice	5
3	Matematická redukce	6
3.1	Úvod	6
3.2	Schéma matematické redukce	6
3.3	Redukce $D_n \rightarrow L$ (z refrakce)	7
3.4	Redukce $L \rightarrow s$ (z nadmořské výšky na referenční kouli)	8
3.5	Redukce $s \rightarrow s_e$ (z referenční koule na elipsoid)	9
3.6	Redukce $s, s_e \rightarrow s_p$ (z kartografického zobrazení)	9
3.7	Alternativní výpočet matematické redukce	9
4	Pokyny pro cvičení	10
4.1	Obecné pokyny	10

Tento materiál obsahuje obecný návod, jak počítat fyzikální a matematické redukce délek. Poslouží studentům při cvičeních z předmětu EM10. Sepsáno pomocí návodu z roku 2003 od V.Fillera.

1 Redukce délek obecně

Obvyklým cílem měření délky je získat délku v rovině kartografického zobrazení (např. S-JTSK) tak, abychom délku mohli použít v souřadnicových výpočtech. Redukcí délky se rozumí získání této hodnoty z hodnoty naměřené dálkoměrem v terénu. V největším zjednodušení to znamená uvážit a zavést vliv povětrnosti, nadmořské výšky a kartografického zobrazení. Pro redukci délek platí následující obecná pravidla:

- Čím je měřená vzdálenost větší, tím je absolutní velikost všech redukcí vyšší. U větších vzdáleností dá požadavek zachování přesnosti měření i během výpočtu poměrně dost práce. Z toho vyplývá následující zásada:
- Čím je měřená vzdálenost větší, tím přesnější (a namáhavější) výpočetní postup je třeba při redukci použít. Je velký rozdíl mezi výpočtem redukce u délky stometrové a padesátikilometrové.
- Redukci měřené délky je možno buď počítat po skončení měření, nebo lze určit některé redukce předem a vložit je přímo do dálkoměru, který je pak samočinně zavádí.

Redukci délek provádíme ve dvou krocích:

1. Fyzikální redukce - odstraňuje vliv teploty, tlaku a vlhkosti vzduchu,
2. Matematická redukce - zajišťuje převod délky po fyzikální redukci na povrch referenční plochy a do kartografického zobrazení.

2 Fyzikální redukce

2.1 Výpočet pomocí Barell - Seearsova vzorce

Rychlost světla ve vakuu c je $299\,792,458 \pm 0,0012$ km/sec. Rychlost světla v obecném prostředí (např. atmosféře) je vždy menší.

$$v = c/n, \tag{1}$$

kde

n je index lomu. Index lomu v atmosféře je funkcí teploty t , tlaku p , vlhkosti vzduchu e a vlnové délky záření λ .

Protože index lomu atmosféry je číslo obecně velmi blízké jedné, zavádí se takzvané skupinové lomové číslo N , definované vzorcem:

$$n_{SK} = 1 + N_{SK} \cdot 10^{-6} \quad (2)$$

Při výpočtu fyzikální redukce pomocí *Barell-Searsova* (dále jen BS) vzorce využijeme právě několikrát výpočet skupinových čísel lomu. Experimentálně bylo vyčísleno skupinové číslo lomu pro přesně definované standardní podmínky ($t = 0^\circ\text{C}$, $p = 760$ torr) jako funkce vlnové délky záření λ :

$${}^0N_{SK} = ({}^0n_{SK} - 1) \cdot 10^6 = 287.604 + 3 \cdot \frac{1.6288}{\lambda^2} + 5 \cdot \frac{0.0136}{\lambda^4} + \dots \quad (3)$$

Toto číslo je pro danou vlnovou délku (a tedy i dálkoměr) konstantní. Skupinové číslo lomu pro libovolnou teplotu, tlak a vlhkost vzduchu se vypočte pomocí vztahu:

$$N_{SK} = {}^0N_{SK} \cdot \frac{p}{760} \cdot \frac{1}{1 + \alpha \cdot t} - \frac{5.5 \cdot 10^{-2}}{1 + \alpha \cdot t} \cdot e, \quad (4)$$

kde

$$\alpha = \frac{1}{273.16}.$$

Konkrétní hodnota fyzikální redukce je pak rovna

$$\Delta d^{[mm]} = D_{mer}^{[km]} \cdot \left(\frac{{}^KN_{SK} - {}^PN_{SK}}{{}^Pn} \right) \cong D_{mer}^{[km]} \cdot ({}^KN_{SK} - {}^PN_{SK}), \quad (5)$$

kde

${}^KN_{SK}$ je skupinové číslo vypočtené dle vzorce (4) pro tzv. standardní *konstrukční* podmínky, tedy takové, za nichž má dálkoměr nulovou fyzikální redukci. ${}^PN_{SK}$ je skupinové číslo, opět dle (4), pro *pracovní* podmínky, tedy ty, za nichž skutečně měříme. Pn je index lomu pro pracovní podmínky vypočtený podle vzorce (2). Méně přesné verze rovnic lze použít pro délky do 3 km.

Pro výpočet fyzikální redukce pomocí *BS* vzorců musíme znát u dálkoměru jeho vlnovou délku λ a dále teplotu, tlak (popř. vlhkost) pro konstrukční podmínky:

	λ [μm]	p [torr]	t[$^\circ\text{C}$]	e[%]
EOK 2000	0.900	740	+15	0
AGA 6A	0.550	730	-15	0
AGA 700	0.633	740	-15	0

Při výpočtu dle vzorce (4) se hodnota vlhkosti zadává přímo v procentech (tedy při $e = 31\%$ zadáme hodnotu 31 a ne 0.31), při méně přesných výpočtech se někdy poslední člen výrazu (4) s vlhkostí vzduchu neuvažuje.

Rozdíl obou skupinových čísel ve vzorci (5) nám dává hodnotu redukce kilometrové délky v milimetrech. Tento poměr definuje jednotku ppm (parts per million). Jednotka ppm se při určování fyzikální redukce používá téměř výhradně - i v následujících, zjednodušených metodách. Pro získání redukce u konkrétní délky (v milimetrech) je tedy nutné redukci vypočtenou v ppm znásobit délkou v kilometrech.

Výpočet fyzikální redukce pomocí BS vzorců je univerzální a přesný. Jeho nevýhodou je značná zdlouhavost. Výrobci dálkoměrů proto vytvořili mnoho metod zrychlení výpočtu fyzikální redukce. V současnosti se fyzikální redukce často počítá a odstraňuje automaticky už při měření.

2.2 Výpočet pomocí tabulek, nomogramů a rotogramů

Tyto metody je možno použít přímo v terénu a nevyžadují zpravidla ani kalkulačku (také byly navrženy v době "bez kalkulačkové"). Jejich výhodou dodnes zůstává maximální jednoduchost a rychlost. Nevýhodou je pak menší přesnost (přibližně 1ppm). Pomůcku lze použít pouze k tomu dálkoměru, ke kterému byla navržena.

2.2.1 Tabulka pro EOK 2000

K dálkoměru je dodávána tabulka, v níž lze pro naměřenou teplotu a tlak snadno odečíst přímo hodnotu redukce v ppm. Teplota je tabelována po 1°C , tlak po 5 torr. Pokud vyžadujeme vyšší přesnost, musíme použít interpolaci. Její použití je patrné z obrázku:

f:	p:	705	708	710	
14		+12		+10	
14,4	↓	12,4		↓	10,4
15		+13		+11	

f:	p:	705	708	710
14		+12		+10
		12,4	11,2	10,4
15		+13		+11

1. V tabulce vyhledáme položky ležící okolo "naší" hodnoty
2. Interpolujeme oba sloupce pro teplotu $14,4^{\circ}\text{C}$
3. Interpolujeme získaný řádek a máme výsledek
4. Postup lze obrátit a začít řádkem, výsledek je stejný

2.2.2 Nomogram pro AGA 6A

Použití nomogramu je jednoduché: Pravítkem spojíme odpovídající teplotu na levé stupnici a tlak na stupnici pravé a na prostřední stupnici čteme přímo velikost redukce v ppm. Je možné odečíst až na 0.1 ppm, vyžaduje to však pečlivost při práci s nomogramem. Jednotka mm Hg je přímo torr.

2.2.3 Rotogram pro AGA 700

I zde je použití snadné: Rotogram má dvě okénka, horní a menší spodní. Ve spodním okénku nastavíme otočením disku naměřený tlak. V horním okénku pak k hodnotě teploty odečítáme přímo velikost fyzikální redukce v ppm. Toto zařízení je nejrychlejší, s postupným opotřebením osy však stále méně přesné.

2.3 Firemní rovnice

Nejspolehlivějším způsobem přesného určení fyzikální redukce jsou firemní rovnice. Jedná se o BS vzorce upravené tak, aby byl výsledný vztah co nejjednodušší. Pro dálkoměry používané ve cvičení mají firemní rovnice tuto podobu:

$$\text{EOK 2000: } \Delta d = 270.54 - \frac{77978.3}{273.15 + t} \cdot \frac{p}{740} \quad (6)$$

$$\text{AGA 6A: } \Delta d = 309.2 - 109.46 \cdot \frac{p}{273.2 + t} \quad (7)$$

$$\text{AGA 700: } \Delta d = 308.6 - 107.9 \cdot \frac{p}{273.2 + t} \quad (8)$$

Velikost redukce je opět v ppm.

3 Matematická redukce

3.1 Úvod

V matematické redukci se převádí šikmá vzdálenost po fyzikální redukci na délku geodetické křivky na povrchu elipsoidu resp. na kartografické ploše. Do matematické redukce se zahrnuje i vliv zakřivení trajektorie elektromagnetické vlny refrakcí. Do matematické redukce jsou zpravidla zahrnovány i tzv. topografické redukce (opravy centrační, opravy ze sklonu dálkoměru apod.), které zde nejsou popsány.

Poznámka: Při výpočtech redukcí je nezbytně nutné dodržet přesnost odpovídající přesnosti měření. Při výpočtu na požadovaný počet desetinných míst je třeba alespoň jedno desetinné místo pro výpočet přidat, v případě přenásobování délky různými koeficienty (například měřítka zkreslení) je nutné mít tyto koeficienty spočítané na dostatečný počet platných cifer (počet cifer délky +1).

3.2 Schéma matematické redukce

Budeme se zabývat matematickou redukcí vzdáleností do 60 km, což jsou prakticky největší délky měřené fázovými geodetickými elektronickými dálkoměry. Schéma úplné matematické redukce je toto:

$$D_n \longrightarrow L \longrightarrow l \longrightarrow s \longrightarrow s'_e \longrightarrow s_e \longrightarrow s_g \longrightarrow s_p, \quad (9)$$

kde

- D_n je délka naměřená dálkoměrem se zavedenými přístrojovými korekcemi a po fyzikální redukci,
- L je přímá spojnice koncových bodu A, B délky,
- l je délka tětiny průmětu bodu A, B na referenční kouli,
- s je příslušný oblouk na referenční kouli,
- s'_e je průmět této délky do referenčního elipsoidu svislicemi bodu A, B k referenční kouli,
- s_e je délka normálového řezu daného normálou bodu A a bodem B,
- s_g je délka geodetické křivky mezi body elipsoidu A_0, B_0 ,
- s_p je délka s_g zobrazená do kartografické plochy.

V předchozím výkladu jste patrně našli množství dosud neznámých termínů. Spokojte se prozatím s vysvětlením, že tyto pojmy budete snad podrobně probírat ve vyšších ročnících. Obecně největší význam má termín - *geodetická křivka*, jako nejkratší spojnice dvou bodů na libovolné zakřivené ploše.

3.4 Redukce $L \rightarrow s$ (z nadmořské výšky na referenční kouli)

$$s = l + \Delta s_k = \sqrt{\frac{L^2 - (H_A - H_B)^2}{\left(1 + \frac{H_A}{R_\alpha}\right) \cdot \left(1 + \frac{H_B}{R_\alpha}\right)}} + \Delta s_k, \quad (11)$$

kde

R_α je poloměr křivosti normálového řezu elipsoidu o azimutu α a H_A , H_B jsou nadmořské výšky koncových bodů (Výšky je vždy třeba zadávat včetně výšky stroje a výšky odrazného hranolu).

R_α je funkcí parametru elipsoidu, zeměpisné šířky bodu φ_A a azimutu α . Určí se buď přímo z diagramu podle B. Delonga (bude k dispozici na cvičení), nebo výpočtem například podle vzorců:

$$R_\alpha = \frac{N}{1 + e'^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \cos^2 \alpha}, \quad (12)$$

N je příčný poloměr křivosti:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}}, \quad (13)$$

e je hlavní excentricita elipsoidu:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 0.00667437223, \quad (14)$$

e' je vedlejší excentricita:

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = 0.006719218798, \quad (15)$$

a $a = 6377397.15508$ m je hlavní poloosa. Číselné konstanty platí pro Besselův elipsoid použitý v zobrazení S-JTSK. Pro naše účely stačí R_α vypočítat s přesností na 0.1 km. Člen

$$\Delta s_k = \frac{l^3}{24R^2}, \quad (16)$$

vyjadřuje vliv zakřivení Země.

Poznámka: Při praktickém výpočtu je třeba dát pozor na dosazování ve správných (tj. u všech veličin ve stejných) jednotkách. Pokud se neprováděly centrační výpočty, je nezbytné zavést výšky bodu A a B včetně výšek stroje a cíle. Vzorec (11) je třeba počítat nejméně na 10 platných cifer (5 cifer délka v m., chceme přesnost na mm, tj. musíme počítat na 0,1mm a jedna cifra jako rezerva).

Pro délky kratší než 10 km lze použít zjednodušený vzorec (11):

$$s = \sqrt{\frac{D_n^2 - (H_A - H_B)^2}{1 + \left(\frac{H_A + H_B}{R}\right)}}. \quad (17)$$

3.5 Redukce $s \rightarrow s_e$ (z referenční koule na elipsoid)

$$s_e = s - H_B \cdot \frac{D_n}{R} \cdot e'^2 \cdot \cos^2 \varphi_A \cdot \cos^2 \alpha = s - \Delta s_e, \quad (18)$$

3.6 Redukce $s, s_e \rightarrow s_p$ (z kartografického zobrazení)

$$s_p = s_e \cdot \frac{1}{6} \cdot (m_A + 4m_M + m_B), \quad (19)$$

$$s_p = s_e \cdot \frac{1}{2} \cdot (m_A + m_B), \quad (20)$$

$$s_p = s_e \cdot m_A, \quad (21)$$

kde

m jsou měřítka zkreslení S-JTSK pro koncové (A, B) a střední bod (M) měřené délky. Měřítka získáme z přibližných souřadnic bodu vypočtením vzdálenosti od počátku souřadnicové soustavy ($R = \sqrt{Y^2 + X^2}$) a následnou interpolací v tabulce (je k dispozici na cvičení) nebo vyčíslením z řady:

$$m = 0.9999 + 10^{-14} \cdot \Delta R^2 \cdot (1.22822 - \Delta R \cdot 10^{-7} \cdot (3.154 - \Delta R \cdot 10^{-6} \cdot (1.848 - \Delta R \cdot 10^{-6} \cdot 1.15))), \quad (22)$$

$$\Delta R = R - R_0 = R - 1298039m. \quad (23)$$

Souřadnice středního bodu získáme zprůměrováním souřadnic bodů koncových. Nelze průměrovat vzdálenost od počátku R . Souřadnice se pro výpočet zaokrouhlují na dekametry.

3.7 Alternativní výpočet matematické redukce

Univerzální postup výpočtu matematické redukce¹ pro jakékoliv kartografické zobrazení vychází z následující úvahy:

Z přibližných souřadnic (v rovině kartografického zobrazení) koncových bodů délky spočítáme vzdálenost l_{red}^0 , která je v podstatě již zredukováná. K této vzdálenosti hledáme fiktivní měřenou délku l_{mer}^0 . Z rovinných souřadnic a výšky bodu vypočteme pomocí zobrazovacích rovnic² zeměpisné souřadnice (φ, λ, H_{el}), které převedeme na kartézské souřadnice (X, Y, Z). Z kartézských souřadnic můžeme přímo vypočítat fiktivní měřenou délku l_{mer}^0 . Redukovanou délku s_{red} k námi měřené délce s_{mer} vypočteme pomocí následujícího poměru:

$$\frac{s_{red}}{s_{mer}} = \frac{l_{red}^0}{l_{mer}^0}. \quad (24)$$

¹Postup byl navržen prof. L.Mervartem a Ing.Z.Lukešem z katedry Vyšší geodézie.

²Postup výpočtu rovinných souřadnic, v konkrétním kartografickém zobrazení, ze zeměpisných souřadnic.

Pomocí výše uvedeného postupu můžeme vypočítat redukovanou délku pro jakokoliv vzdálenost libovolného kartografického zobrazení. Vstupem jsou přibližné souřadnice koncových bodů a měřená vzdálenost, případně opravená o vliv refrakce (10). Výpočet naráží na neznalost výpočtu pomocí zobrazovacích rovnic a transformace mezi zeměpisnými a kartézskými souřadnicemi. Obojí je probíráno v předmětech Matematická kartografie a Vyšší geodézie ve vyšších ročnících.

4 Pokyny pro cvičení

4.1 Obecné pokyny

Postup výpočtu fyzikální a matematické redukce bude vysvětlen na jednom cvičení. Úkolem každého studenta potom bude vypočítat délku po fyzikální a matematické redukci pro 10 zadaných délek. Výpočet fyzikální redukce se bude provádět pomocí BS vzorců a firemních rovnic. Vstupem pro matematickou redukci jsou délky zredukované o fyzikální redukci pomocí BS vzorců. Zadání a kontrola výsledků bude k dispozici na webových stránkách cvičení. Úloha bude splněna po kladné kontrole všech požadovaných výsledků (fyzikální redukce - BS vzorce a firemní rovnice, délka po matematické redukci).

Upozornění: *Výpočet pomocí BS vzorců se může poměrně dost lišit od výpočtu pomocí firemních rovnic a tabulek. Příčinou je zavedení vlhkosti vzduchu, která se u tabulek a firemních rovnic nezohledňuje.*