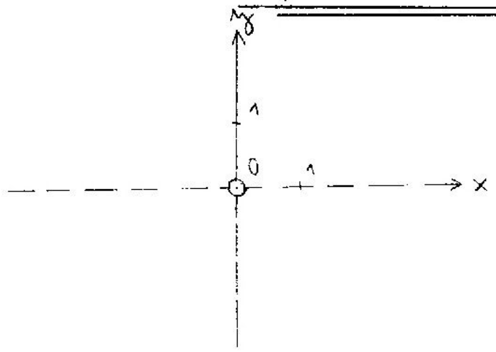
KRUH **63** (G-1)
SETNIČKA Martin

ÚLOHA 3C

Pro funkci $f(x,y) = k \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$; $k = 20$ (pořadové číslo)

(a) napište a načrtněte definiční obor, určete obor hodnot.

$y \neq 0 \Rightarrow D_f = \{[x,y] \in R^2, x \in R \wedge y \in R - \{0\}\}$



$\frac{x}{y} \in R \Rightarrow H_f = (k \operatorname{arctg}(-\infty), k \operatorname{arctg}(\infty))$

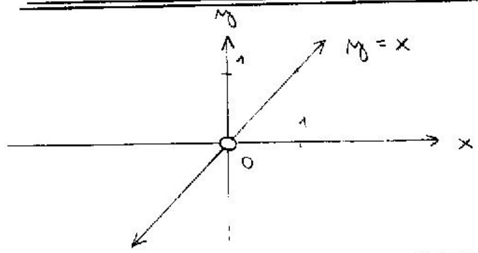
$H_f = (-10\pi, 10\pi)$

(b) napište rovnice a název vrstevnic, načrtněte aspoň jednu,

$c = 20 \operatorname{arctg}\frac{x}{y} \Rightarrow y = \frac{x}{\operatorname{tg}(\frac{c}{20})}$

=> vrstevnice jsou dvojice polopřímek jdoucích z počátku (libovolná směrnice)

$c = 5\pi \Rightarrow y = x$



(c) Pro spádnice platí rovnice:

výsledky z (d):

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{20y}{x^2+y^2}$ $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{20x}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = y'(x)\frac{\partial f}{\partial x}$

$-\frac{\cancel{20}x}{\cancel{x^2+y^2}} = y'\frac{\cancel{20}y}{\cancel{x^2+y^2}}$ $/ \cdot \frac{x^2+y^2}{20}$

podmínka: $x^2+y^2 \neq 0$
tj bod $[0,0]$

$-x = y'y$

$-\int x\,dx = \int y\,dy$

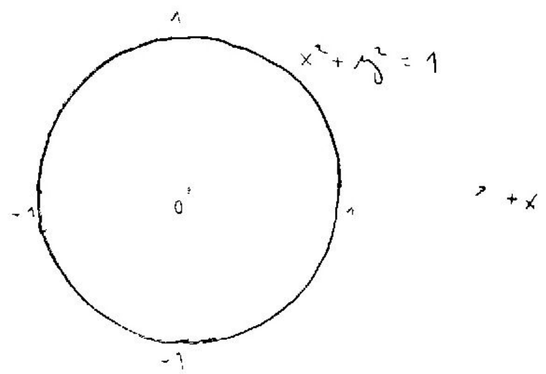
$-\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + c$ => název: kružnice

pro $r = 1$

$y^2 + x^2 = 2c$

$r^2 = 2c$

$c = \frac{1}{2}$



(d) v bodě $T = [1,1,?]$ grafu funkce f určete lokální ortonormální bázi z tečného vektoru vrstevnice, tečného vektoru spádnice a normálového vektoru grafu.

$\vec{s}, \vec{v}, \vec{n}$ .. jsou ortogonální

$f(1,1) = 5\pi \quad \Rightarrow \quad T = [1,1;5\pi]$

$\vec{v} = \left(-\frac{\partial f(A)}{\partial y}; \frac{\partial f(A)}{\partial x}; 0\right)$ - vektor tečny vrstevnice $\qquad A = [1,1]$ (průmět T)

$\vec{n} = \left(\frac{\partial f(A)}{\partial x}; \frac{\partial f(A)}{\partial y}; -1\right)$ - normálový vektor

$\vec{s} = \left(\frac{\partial f(A)}{\partial x}; \frac{\partial f(A)}{\partial y}; |\mathrm{grad}\, f(A)|^2\right)$ - vektor tečny spádnice

$\frac{\partial f(A)}{\partial x} = \frac{20y}{x^2+y^2} = 10 \qquad \frac{\partial f(A)}{\partial y} = -\frac{20x}{x^2+y^2} = -10$

$|\mathrm{grad}\, f(A)|^2 = (|10,-10|)^2 = 200$

ORTOGONÁLNÍ BÁZE $\qquad$ DĚLENÍ VELIKOSTÍ

$\vec{v} = (10,10,0) = (1,1,0) \qquad / : \sqrt{2} \quad \Rightarrow$

$\vec{n} = (10,-10,-1) \qquad / : \sqrt{201} \quad \Rightarrow$

$\vec{s} = (10,-10,200) = (1,-1,20) \qquad / : \sqrt{402} \quad \Rightarrow$

ORTONORMÁLNÍ BÁZE (dělení)

$\Rightarrow \quad \vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$

$\Rightarrow \quad \vec{n} = \left(\frac{10\sqrt{201}}{201}; -\frac{10\sqrt{201}}{201}; -\frac{\sqrt{201}}{201}\right)$

$\Rightarrow \quad \vec{s} = \left(\frac{\sqrt{402}}{402}; -\frac{\sqrt{402}}{402}; \frac{20\sqrt{402}}{402}\right)$

(e) určete Taylorův polynom 2. stupně funkce f v bodě $A=[1;1]$, co je grafem tohoto polynomu, napište rovnici a načrtněte jeho vrstevnici v bodě A,

OBECNĚ: $T_2(h) = f(A) + d f_A(h) + \frac{1}{2} d^2 f_A(h)$

$$d_A(h) = \frac{\partial f(A)}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f(A)}{\partial y} h_2$$

$$d^2_A(h) = \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2} h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f(A)}{\partial x \partial y} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f(A)}{\partial y^2} h_2^2$$

$h_1 = x - x_A = x - 1$

$h_2 = y - y_A = y - 1$

VÝSLEDKY z (d):

$f(A) = 5\pi$; $\frac{\partial f(A)}{\partial x} = 10$; $\frac{\partial f(A)}{\partial y} = -10$

$$\frac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2} = -\frac{40xy}{(x^2+y^2)^2} = -10 \qquad \frac{\partial^2 f(A)}{\partial y^2} = \frac{40xy}{(x^2+y^2)^2} = 10$$

$$\frac{\partial^2 f(A)}{\partial x \partial y} = \frac{20\left[(x^2+y^2)-2y^2\right]}{(x^2+y^2)^2} = \frac{20(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

$$T_2(h) = 5\pi + 10(x-1) - 10(y-1) + \frac{1}{\cancel{2}}\left[-\cancel{10}^{5}(x-1)^2 + \cancel{10}^{5}(y-1)^2\right]$$

$$= 5\pi + 10x - \cancel{10} - 10y + \cancel{10} - 5x^2 + 10x - \cancel{5} + 5y - 10y + \cancel{5} =$$

$$\underline{\underline{T_2(h) = -5x^2 + 20x + 5y^2 - 20y + 5\pi}}$$

graf: <u>hyperbolický paraboloid</u>

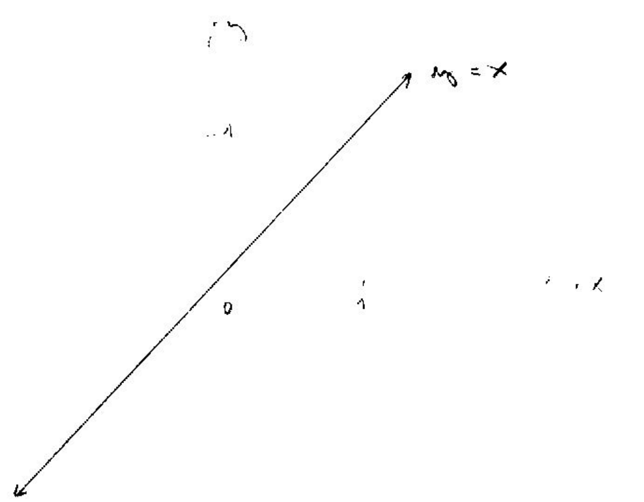
VRSTEVNICE: $c = -5(x-2)^2 + 5(y-2)^2 + 5\pi$

v A ... $c = 5\pi$

$$\cancel{5\pi} = -5(x-2)^2 + 5(y-2)^2 + \cancel{5\pi} \qquad / :5 \quad / +(x-2)^2$$

$$(x-2)^2 = (y-2)^2 \qquad / \sqrt{\ } \quad / +2$$

$$\underline{\underline{x = y}}$$



(f) vypočítejte kosinus úhlu normály grafu funkce f v bodě T, který svírá s rovinou xy.

~ odchylka normálového vektoru od jeho průmětu v xy tj. gradient

$\vec{n} = (10; -10; -1)$ $\quad$ $\operatorname{grad} f = (10; -10)$ $\sim$ $(1\cancel{0}; -1\cancel{0}; 0)$ $\quad$ $(:10)$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}\,\operatorname{grad} f}{|\vec{n}|\,|\operatorname{grad} f|} = \frac{20}{\sqrt{402}} = \boxed{\frac{10\sqrt{402}}{201}}$$