STUDIJNÍ TEXT PRO OBOR G+K
KATEDRA MATEMATIKY
FAKULTA STAVEBNÍ
ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ

OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Doc. RNDr. Milada Kočandrlová, CSc.

Lektorovali: RNDr. Milan Kočandrle, CSc., Doc. RNDr. Jaroslav Černý, CSc.
Sazba v programu AMSTEX: Doc. RNDr. Milada Kočandrlová, CSc.
Obrázky: Ing. Stanislav Olivík
Typografická úprava: Mgr. Milan Bořík, Ph.D.

2004

Co je diferenciální rovnice

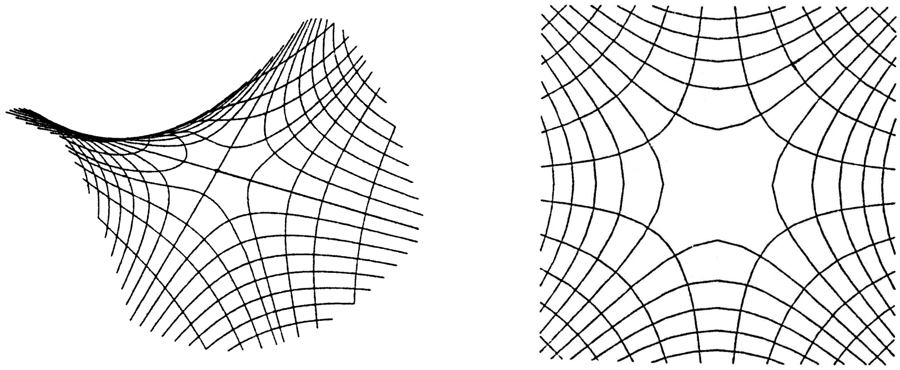
Grafem funkce $f : z = xy$ je hyperbolický paraboloid, obr. 1. Vrstevnicemi jsou rovnoosé hyperboly $xy = c$, a to pro $c > 0$ v prvním a třetím kvadrantu a pro $c < 0$ ve druhém a čtvrtém kvadrantu. Hledejme křivky, které kolmo protínají vrstevnice. Takové křivky se nazývají **spádnice**.

Víme, že gradient funkce f je kolmý na vrstevnice funkce f, bude tudíž určovat tečnu spádnice. Označíme-li jednu ze spádnic $k : y = y(x)$, derivace $y'(x)$ určí její tečný vektor $\mathbf{t} = (1, y'(x))$. Protože $f(x, y) = xy$, je

$$grad\, f(x, y) = (y, x)$$

a ve společném bodě $[x, y(x)]$ vrstevnice a spádnice jsou tyto vektory lineárně závislé. Pro jejich souřadnice tudíž platí

$$\frac{1}{y(x)} = \frac{y'(x)}{x}.$$



Obr. 1

Pro spádnici k dostáváme po úpravě rovnici

$$y(x)y'(x) = x. \tag{1}$$

Obě strany rovnice integrujeme podle x

$$\int y(x)y'(x)\, dx = \int x\, dx + c. \tag{2}$$

Na levou stranu rovnice (2) použijeme pravidlo o substituci

$$\int y\, dy = \int x\, dx + c.$$

Potom pro hledané křivky dostáváme implicitní vyjádření

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + c\,,\ c \in \mathbb{R}.$$

Říkáme, že systém spádnic, ortogonálních k systému vrstevnic, je dán rovnicí (1). V této rovnici vedle proměnné x je neznámá funkce y a neznámá také její derivace y'.

Diferenciální rovnice 1. řádu

Předpokládejme, že F je daná funkce s definičním oborem $\mathbb{D}_F \subset \mathbb{R}^3$. Rovnici

$$F(x, y, y') = 0, \tag{3}$$

ve které vedle proměnné x je neznámá funkce y a její derivace y', se nazývá **obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu**.

Obyčejná proto, že se v ní vyskytuje obyčejná a ne parciální derivace. Diferenciální proto, že se v ní vyskytují derivace a 1. řádu proto, že jsou to pouze derivace 1. řádu.

Řešením diferenciální rovnice (3) nazýváme každou funkci $y = y(x)$, diferencovatelnou na intervalu $\mathbb{J}$, pro kterou platí:

Pro každé $x \in \mathbb{J}$ je $(x, y(x), y'(x)) \in \mathbb{D}_F$ a $F(x, y(x), y'(x)) = 0$.

Je-li interval $\mathbb{J}$ uzavřený, nebo polouzavřený, dosazujeme za y' v jeho krajních bodech příslušnou derivaci zleva, resp. zprava.

Je zřejmé, že řešení rovnice (3) můžeme "slepovat". Jsou-li např. $\overline{y}$ na intervalu $(a, b\rangle$ a $\widetilde{y}$ na intervalu $\langle b, c)$ dvě řešení rovnice (3) a platí $\overline{y}(b) = \widetilde{y}(b)$, můžeme tato řešení "slepit". Výsledkem bude řešení $y = \begin{cases} \overline{y}(x), & \text{pro } x \in (a, b\rangle \\ \widetilde{y}(x), & \text{pro } x \in \langle b, c) \end{cases}$.

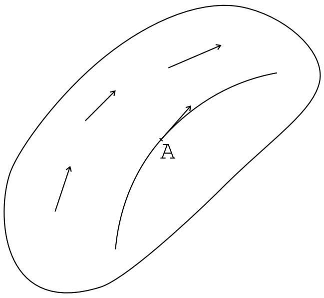
Rovnice (3) je v **implicitním tvaru**. Lze-li z této rovnice vypočítat derivaci y' jako funkci x a y, tj.

$$y' = f(x, y), \tag{4}$$

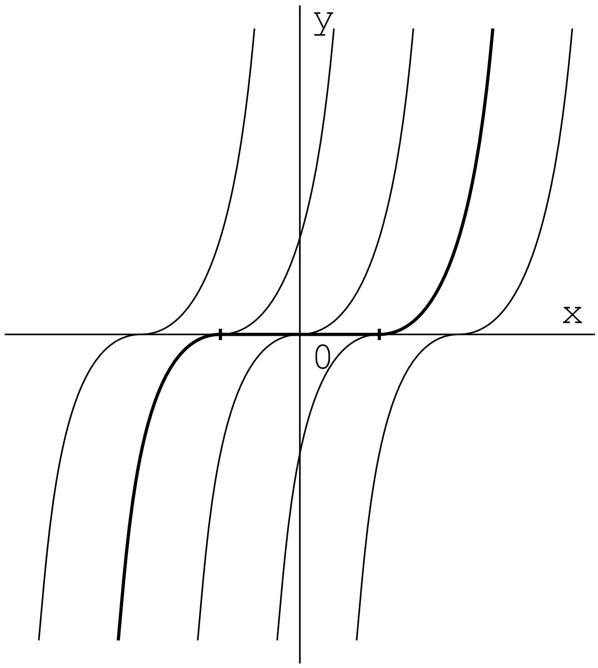
říkáme, že rovnice je v **explicitním tvaru**.

Označíme-li $\mathbb{M}$ definiční obor funkce f, vidíme, že rovnice (4) určuje na množině $\mathbb{M}$ **vektorové pole** $\mathbf{s}(x, y) = (1, f(x, y))$. Hledáme-li její řešení, hledáme křivky v množině $\mathbb{M}$, které v každém svém bodě $[x, y]$ mají tečnu určenou vektorem $(1, f(x, y))$. Tyto křivky se nazývají **integrální křivky** vektorového pole $\mathbf{s}$.

Aby takové křivky existovaly, musíme zřejmě předpokládat, že funkce f je spojitá. K danému vektorovému poli v rovině bude existovat takových křivek více. Podle obr. 2 se zdá, že známe-li jeden bod A křivky, je tím křivka určena jednoznačně. Snadno se přesvědčíme, že to bez dalších předpokladů není pravda.



Obr. 2



Obr. 3

Na obr. 3 je graf funkce $y = x^3$. Jestliže jej ve směru osy x posuneme do všech bodů roviny, určují tečné vektory těchto křivek vektorové pole. Stejné vektorové pole ale určují i křivky, které bychom slepovali z grafů funkce $y = x^3$ a úseček na ose x. Zřejmě bude platit:

Jestliže f je funkce spojitá na otevřené množině $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^2$, existuje ke každému bodu $[x_0, y_0] \in \mathbb{M}$ funkce $y = y(x)$, která vyhovuje rovnici (4) a platí $y(x_0) = y_0$.

Jestliže navíc má funkce f spojitou parciální derivaci podle y, existuje okolí bodu $[x_0, y_0]$, na kterém je řešení $y = y(x)$ (s uvedenými podmínkami) určeno jednoznačně.

Odtud je zřejmé, že pole na obr. 3 nesplňuje poslední podmínku. Bodům $[x, x^3]$, i všem bodům $[x + c, x^3]$, $c \in \mathbb{R}$, je přiřazen vektor $(1, 3x^2)$. Tedy bodu $[x, y]$ je přiřazen vektor $(1, 3y^{\frac{2}{3}})$ a funkce $f(x, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ má parciální derivaci podle y rovnu $2y^{-\frac{1}{3}}$, která není v bodech $[x, 0]$, $x \in \mathbb{R}$, spojitá.

Integrální křivka, jejímž každým bodem prochází ještě aspoň jedna další integrální křivka, se nazývá **singulární integrální křivka**, nebo také **singulární řešení**. V předchozím příkladě to byla funkce $y = 0$.

Úloha, kdy hledáme integrální křivku procházející bodem $[x_0, y_0]$, se nazývá **Cauchyova úloha**. Podmínka $y_0 = y(x_0)$ se nazývá **počáteční podmínka**.

Řešit diferenciální rovnici analyticky, tj. vyjádřit řešení pomocí elementárních funkcí, je možné jen pro některé funkce $y = y(x)$. Každou rovnici ale můžeme řešit numericky, tj. pro dané řešení $y = y(x)$ a daná čísla $x_1, \ldots, x_n$, z definičního oboru funkce f, můžeme určit hodnoty $y(x_1), \dots, y(x_n)$ s předem danou přesností.

Ukážeme si některé typy rovnic, u kterých můžeme vyjádřit řešení pomocí elementárních funkcí, a to jak v explicitním, tak v implicitním tvaru. Přitom budeme automaticky předpokládat, že použijeme-li u některé funkce parciální derivaci, že tato derivace existuje a je spojitá.

Exaktní diferenciální rovnice

Předpokládejme, že funkci y, proměnné x, máme dánu implicitně rovnicí

$$U(x, y) = k. \tag{5}$$

Derivováním rovnice (5) podle x dostaneme (y je funkcí x)

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} y' = 0. \tag{6}$$

Obráceně, jestliže máme dánu rovnici

$$P(x, y) + y' Q(x, y) = 0 \tag{7}$$

a existuje funkce $U(x, y)$ taková, že

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = P(x, y)\,, \quad \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)\,, \tag{8}$$

má rovnice (7) řešení. Její řešení jsou dána implicitně rovnicí (5).

Rovnice (7) se nazývá **exaktní diferenciální rovnice**.

Budeme-li tedy řešit rovnici (7), budeme zjišťovat, zda existuje funkce U taková, že jsou splněny rovnosti (8).

Víme, že pokud jsou smíšené parciální derivace nějaké funkce $f(x, y)$ spojité, jsou také záměnné. Tudíž, jestliže hledaná funkce U existuje, musí platit

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}. \tag{9}$$

Než ukážeme, že platnost rovnosti (9) je pro existenci funkce U podmínka také postačující, uvedeme ještě dvě pomocná tvrzení.

Tvrzení 1. Jestliže funkce $g(x)$ a $h(x)$ jsou definovány na intervalu $\mathbb{J}$, potom $g'(x) = h'(x)$ na $\mathbb{J}$ právě tehdy, když existuje konstanta c taková, že $g(x) = h(x) + c$.

Tvrzení 2. Je-li f funkce proměnných t a x, potom platí

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_a^b f(t, x)\, dx\right) = \int_a^b \frac{\partial f(t, x)}{\partial t}\, dx.$$

Jak bylo řečeno úvodem, samozřejmě předpokládáme, že f je funkce spojitá a má spojité parciální derivace.

Nyní můžeme dokázat tvrzení, které jsme zformulovali výše.

Tvrzení 3. Jsou-li dány funkce P, Q, s definičním oborem $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^2$, které mají spojité parciální derivace a splňující rovnost (9), existuje funkce $U(x, y)$ taková, že platí rovnosti (8).

Důkaz. *Pokud funkce U existuje, musí podle první z rovností v (8) platit*

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y)\, dt + \varphi(y).$$

Potom

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = P(x, y).$$

Pro parciální derivaci funkce U podle y dostáváme podle tvrzení 2

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{x_0}^{x} P(t, y)\, dt\right) + \varphi'(y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(t, y)}{\partial y}\, dt + \varphi'(y).$$

Podle (8) tedy je

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}\, dt + \varphi'(y).$$

Primitivní funkce k funkci $\dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ je zřejmě funkce $Q(x, y)$. Tudíž

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = Q(x, y) - Q(x_0, y) + \varphi'(y).$$

To znamená, že zvolíme-li funkci φ tak, aby $\varphi'(y) = Q(x_0, y)$, bude $\dfrac{\partial U}{\partial y} = Q$. Funkce U je tedy hledanou funkcí, tj.

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\, dx + \int Q(x_0, y)\, dy + c, \tag{10}$$

kde $c \in \mathbb{R}$.

Příklad 1. *Ověřením podmínky (9) zjistíme, že diferenciální rovnice*

$$3x^2 + 6xy^2 + (6x^2y + 4y^3)y' = 0$$

je exaktní diferenciální rovnice, ve které

$$P(x, y) = 3x^2 + 6xy^2\,, \quad Q(x, y) = 6x^2y + 4y^3.$$

Dosazením do vzorce (10), x_0 bylo libovolné číslo z definičního oboru rovnice, např. $x_0 = 0$, je

$$U(x,y) = \int_0^x (3t^2 + 6ty^2)\,dt + \int 4y^3\,dy + c = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + c.$$

Hledané řešení dané rovnice

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = c.$$

Rovnice se separovanými proměnnými

Rovnici

$$y' = -\frac{p(x)}{q(y)}, \tag{11}$$

kde funkce p, resp. funkce q, $q \neq 0$, je diferencovatelná na intervalu $\mathbb{I}$, resp. $\mathbb{J}$, nazýváme **rovnice se separovanými proměnnými**.

Tak se tato rovnice nazývá proto, že proměnné x a y můžeme separovat (oddělit), tj. upravit rovnici tak, že na jedné její straně bude funkce proměnné x a na její druhé straně bude funkce proměnné y násobená y'. V našem případě dostaneme po úpravě

$$q(y) \cdot y' = -p(x).$$

Jestliže obě strany rovnice zintegrujeme podle x, přičemž na levou stranu použijeme větu o substituci, dostaneme

$$\int q(y) \cdot y'\,dx = -\int p(x)\,dx + c,$$

a potom

$$\int q(y)\,dy = -\int p(x)\,dx + c.$$

Abychom separací proměnných mohli řešit diferenciální rovnici, nemusíme ji mít nutně zadanou ve tvaru (11). Např. rovnici

$$\frac{p(x) \cdot u(y)}{q(y) \cdot v(x) \cdot y'} = f(x) \cdot g(y)$$

upravíme na tvar

$$\frac{p(x)}{v(x) \cdot f(x)} = \frac{q(y) \cdot g(y)}{u(y)} y'.$$

Snadno bychom ověřili, že rovnice (11) je zvláštním případem exaktní diferenciální rovnice.

Příklad 2. *Řešme rovnici*

$$y'x = y\,,\ \ x \neq 0.$$

Separováním proměnných dostaneme rovnici, kterou vyřešíme integrováním:

$$\frac{1}{x} - \frac{y'}{y} = 0 \implies \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dy}{y} = 0 \implies \ln|y| = \ln|x| + c\,,\ y \neq 0.$$

V poslední z rovnic, zvolíme konstantu c ve tvaru $c = \ln \overline{c}$, kde $\overline{c} > 0$. Potom můžeme psát $|y| = \overline{c}|x|$. Odstraníme absolutní hodnoty, aby řešením byla funkce diferencovatelná, musí platit $y = \overline{c}x$, nebo $y = -\overline{c}x$. Potom řešení dané rovnice jsou všechny funkce tvaru $y = Cx\,,\ C \neq 0$.

Při řešení jsme se omezili na případ $x \neq 0$, $y \neq 0$, co u rovnice v původním tvaru nebylo nutné. V průběhu výpočtu jsme tedy vyloučili funkci $y = 0$. Dosazením do dané rovnice se přesvědčíme, že funkce $y = 0$ rovnici řeší, a proto ji zahrneme do všech řešení. Obecné řešení dané rovnice tedy je

$$y = cx\,,\ c \in \mathbb{R}.$$

Lineární diferenciální rovnice

Lineární diferenciální rovnice homogenní, nebo také lineární rovnice s nulovou pravou stranou, je rovnice, kterou lze zapsat ve tvaru

$$y' + p(x)y = 0, \tag{12}$$

kde p je diferencovatelná funkce na intervalu $\mathbb{J}$. Je to vlastně rovnice se separovanými proměnnými, a tu již řešit umíme.

Jedním jejím řešením je funkce $y = 0$. Další řešení najdeme separováním proměnné na množině $\mathbb{M} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{J}, y \neq 0\}$:

$$p(x) + \frac{y'}{y} = 0 \implies \int p(x)\,dx + \ln|y| = c\,,\ c \in \mathbb{R}.$$

Stejně jako u příkladu 2 můžeme psát $c = \ln \overline{c}$, $\overline{c} > 0$. Potom řešení zapíšeme ve tvaru

$$\ln e^{\int p(x)\,dx} + \ln|y| = \ln \overline{c}$$

a následně

$$|y| = \overline{c}e^{-\int p(x)\,dx}\,,\ \overline{c} > 0.$$

Tato rovnost platí právě když

$$y = \overline{c}e^{-\int p(x)\,dx}\,, \quad \text{nebo} \quad y = -\overline{c}e^{-\int p(x)\,dx},$$

proto obecné řešení rovnice (2) je

$$y = Ce^{-\int p(x)\,dx}\,,\ C \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Lineární diferenciální rovnice nehomogenní

Variace konstanty

Nehomogenní lineární diferenciální rovnice, nebo také rovnice s nenulovou pravou stranou, je rovnice, kterou můžeme psát ve tvaru

$$y' + y\,p(x) = q(x), \tag{14}$$

kde p, q jsou diferencovatelné funkce na intervalu $\mathbb{J}$. Její řešení můžeme najít pomocí řešení rovnice (12) s nulovou pravou stranou (a stejnou levou stranou). Tato metoda řešení se nazývá **variace konstanty**. Postup řešení můžeme zformulovat do dvou kroků:

1. Určíme obecné řešení (13) rovnice (12).
2. Obecné řešení rovnice (14) hledáme ve tvaru

   $$y = C(x)e^{-\int p(x)\,dx},$$

   kde C je funkce proměnné x diferencovatelná na intervalu $\mathbb{J}$. Postup si ukážeme na příkladu.

Příklad 3. *Rovnici*

$$xy' - y = x^3$$

nejdříve za předpokladu $x \neq 0$ *upravíme na tvar (14)*

$$y' - \frac{1}{x}y = x^2.$$

1. Najdeme obecné řešení rovnice s nulovou pravou stranou:

   $$y' - \frac{1}{x}y = 0 \implies \frac{y'}{y} - \frac{1}{x} = 0 \implies \ln|y| = \ln|x| + \ln c \implies y = cx.$$

2. Hledáme funkci C takovou, aby funkce

   $$y = x\,C(x)$$

   byla řešením dané nehomogenní rovnice. Proto určíme derivaci

   $$y' = C(x) + x\,C'(x)$$

a obě funkce y a y' dosadíme do nehomogenní rovnice a upravíme

$$C(x) + x\,C'(x) - \frac{1}{x} x\,C(x) = x^2 \implies C'(x) = x \implies C(x) = \frac{1}{2}x^2 + c.$$

Obecné řešení dané rovnice dostaneme dosazením funkce C do předpokládaného řešení, tj.

$$y = \frac{1}{2}x^3 + cx.$$

Existence a jednoznačnost řešení diferenciální rovnice

Dříve než se budeme zabývat otázkou řešitelnosti diferenciální rovnice, vypočítejme ještě jeden příklad.

Příklad 4. *Řešení rovnice*

$$y' = 6xy^{\frac{2}{3}},$$

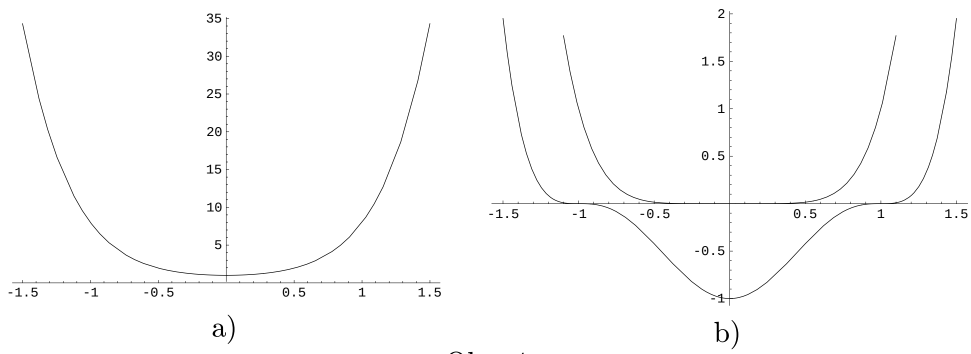
za předpokladu $y \neq 0$, určíme separací proměnných.

$$\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}y' = 2x \implies \sqrt[3]{y} = x^2 + c\,,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

Obecné řešení dané rovnice jsou funkce

$$\begin{aligned} &y = 0, \\ &y = (x^2 + c)^3\,,\ \ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pro každé $c > 0$ existuje jediná integrální křivka, obr. 4 a.



Obr. 4

Pro $c \leq 0$ lze integrální křivky skládat. Např. bodem A na obr. 4 b prochází křivky

$$y_1 = \begin{cases} x^6, & x \leq 0 \\ (x^2+c)^3, & x \geq \sqrt{|c|} \\ 0, & 0 \leq x \leq \sqrt{|c|} \end{cases}, \quad y_2 = \begin{cases} 0, & x \leq \sqrt{|c|} \\ (x^2+c)^3, & x \geq \sqrt{|c|} \end{cases},$$

$$y_3 = \begin{cases} 0, & x \leq -\sqrt{|c|} \\ (x^2+c)^3, & x \geq -\sqrt{|c|} \end{cases}, \quad y_4 = \begin{cases} 0, & |x| \leq \sqrt{|c|} \\ (x^2+c)^3, & |x| \geq \sqrt{|c|} \end{cases},$$

ale také $y_5 = (x^2+c)^3$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Mějme nyní diferenciální rovnici $y' = f(x,y)$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$, kde funkce f je spojitá na množině $\mathbb{M} = \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle \times \langle y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon\rangle$. Než přistoupíme k jejímu řešení, připomeňme, že má-li funkce (jedné, dvou nebo více proměnných) za definiční obor uzavřenou a omezenou množinu, nabývá na ní svého maxima a minima.

Pro každé $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$ počítejme integrály

$$\int_{x_0}^{x} y'(x)\, dx = \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\, dx.$$

Dosazením mezí do primitivní funkce na levé straně rovnice dostáváme rovnici (jak se můžeme snadno přesvědčit), která je s původní rovnicí ekvivalentní. Na její levé straně je funkce

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\, dx, \tag{15}$$

která je řešením dané rovnice, pokud ovšem toto řešení existuje.

Integrál je spojitou funkcí své horní meze. Tudíž pokud má rovnice (15) řešení, je toto řešení spojitá funkce proměnné x.

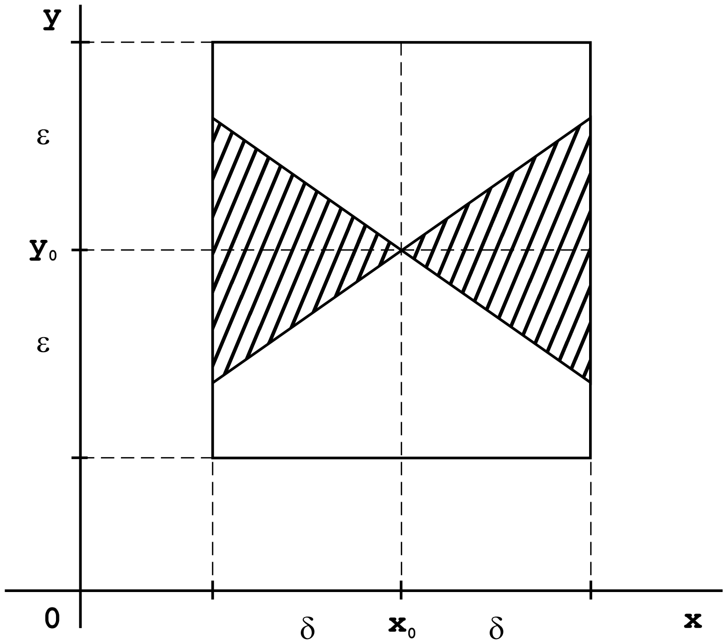
Zbývá dokázat existenci a jednoznačnost řešení. K tomu bude třeba předpokládat, že

1. funkce f je spojitá na množině $\mathbb{M}$,

2. funkce $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ je spojitá na množině $\mathbb{M}$.

Pro důkaz existence vystačíme s prvním předpokladem, ale důkaz se zjednoduší, budeme-li předpokládat platnost obou.

Označíme $m = \max_{[x,y]\in\mathbb{M}} |f(x,y)|$, $k = \max_{[x,y]\in\mathbb{M}} \left|\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|$. Ze vzorce (15) vyplývá, že platí $|y(x) - y_0| \leq m|x - x_0|$. Názorně to znamená, že graf funkce $y = y(x)$ leží ve vyšrafované části roviny na obr. 5, tj. leží v úhlu, obsahujícím přímku $y = y_0$, jehož rameny jsou přímky $y = y_0 + m(x - x_0)$, $y = y_0 - m(x - x_0)$.



Obr. 5

Hledáme-li řešení v celém intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$, musíme zřejmě požadovat, aby $m\delta < \epsilon$, tj. k číslu ϵ musíme volit číslo δ tak, aby tato nerovnost platila.

Nyní hledejme podmínku pro existenci a jednoznačnost řešení. Sestrojme podle vzorce (15) posloupnost aproximací řešení, spojitých funkcí na množině $\mathbb{M}$, následujícím způsobem:

$$
\begin{aligned}
y_0(x) &= y(x_0) = y_0, \\
y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0(x))\, dx, \\
y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))\, dx, \\
&\dots \\
y_{n+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))\, dx, \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Z posloupnosti aproximací pro každé $x \in \langle x_0-\delta, x_0+\delta\rangle$ dostáváme číselnou posloupnost, označme ji $(\overline{y}_n)$ a počítejme rozdíl jejích sousedních členů:

$$
R = |\overline{y}_{n+1} - \overline{y}_n| = \left| \int_{x_0}^{x} f(x, \overline{y}_n)\, dx - \int_{x_0}^{x} f(x, \overline{y}_{n-1})\, dx \right| \leq \int_{x_0}^{x} |f(x, \overline{y}_n) - f(x, \overline{y}_{n-1})| dx.
$$

Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě funkce existuje $\xi \in (\overline{y}_{n-1}, \overline{y}_n)$ takové, že

$$
|f(x, \overline{y}_n) - f(x, \overline{y}_{n-1})| = \left| \frac{\partial f(x, \xi)}{\partial y} (\overline{y}_n - \overline{y}_{n-1}) \right| \leq k |\overline{y}_n - \overline{y}_{n-1}|,
$$

(k jsme označili maximum parciální derivace funkce f podle y). Potom

$$
R \leq k|\overline{y}_n - \overline{y}_{n-1}| \int_{x_0}^{x} dx = k|\overline{y}_n - \overline{y}_{n-1}||x - x_0| \leq k\delta |\overline{y}_n - \overline{y}_{n-1}|.
$$

Došli jsme k nerovnosti

$$
|\overline{y}_{n+1} - \overline{y}_n| \leq k\delta |\overline{y}_n - \overline{y}_{n-1}|. \tag{16}
$$

Pro každé $i, j \in \mathbb{N}$, $i > j$, podle (16) postupně dostáváme

$$
|y_{i+1} - y_i| \leq k\delta |y_i - y_{i-1}| \leq (k\delta)^2 |y_{i-1} - y_{i-2}| \leq \cdots \leq (k\delta)^{i-j} |y_{j+1} - y_j|.
$$

Dokázali jsme nerovnost

$$
|y_{i+1} - y_i| \leq (k\delta)^{i-j} |y_{j+1} - y_j|. \tag{17}
$$

Zřejmě platí

$$
|y_{i+1} - y_j| \leq |y_{i+1} - y_i| + \cdots + |y_{j+1} - y_j|.
$$

Použijeme-li na každý sčítanec na pravé straně této nerovnice vzorec (17), dostaneme

$$
|y_{i+1} - y_j| \leq ((k\delta)^{i-1} + \cdots + k\delta + 1) |y_{j+1} - y_j|.
$$

Zvolíme-li δ tak, aby bylo $\delta < \frac{1}{k}$, tj. $k\delta < 1$, můžeme v závorce sečíst a výsledek odhadnout pomocí součtu geometrické řady

$$|y_{i+1} - y_j| \leq \frac{1}{1-k\delta}|y_{j+1} - y_j|. \tag{18}$$

Pokud bychom pro názornost zvolili $\delta = \frac{1}{2k}$, tj. $k\delta = \frac{1}{2}$, bude mít vzorec (17), resp. (18), tvar

$$|y_{i+1} - y_i| \leq \frac{1}{2}|y_i - y_{i-1}|\,,\ \text{resp.}\ |y_{i+1} - y_j| \leq 2|y_{j+1} - y_j|.$$

Nerovnost (18) tedy má význam ten, že všechna čísla $y_j, \ldots$ leží na úsečce o středu y_j a "poloměru" $2|y_{j+1} - y_j|$. Nerovnost (17) pak má význam ten, že analogický "kruh" na přímce, sestrojený pro střed y_{j+1}, bude mít poloviční "poloměr".

Dostáváme posloupnost do sebe vnořených úseček, jejichž velikost konverguje k nule. V každé z těchto úseček leží, až na konečný počet, všechny body posloupnosti $(\overline{y}_n)$. Odtud vyplývá, že posloupnost $(\overline{y}_n)$ má limitu pro $n \to \infty$, tato limita je jediná a určuje řešení rovnice $y' = f(x, y)$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$.

Příklad 5. *Pomocí posloupnosti aproximací rovnice $y' = x^2 + y$, s počáteční podmínkou $y(0) = 0$, určeme hodnotu integrální křivky v bodě $x = 0.5$ s přesností 10^{-4}.*

$$y_1(x) = \int_0^x x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\,,\ y_1(0.5) \doteq 0.041\overline{6},$$

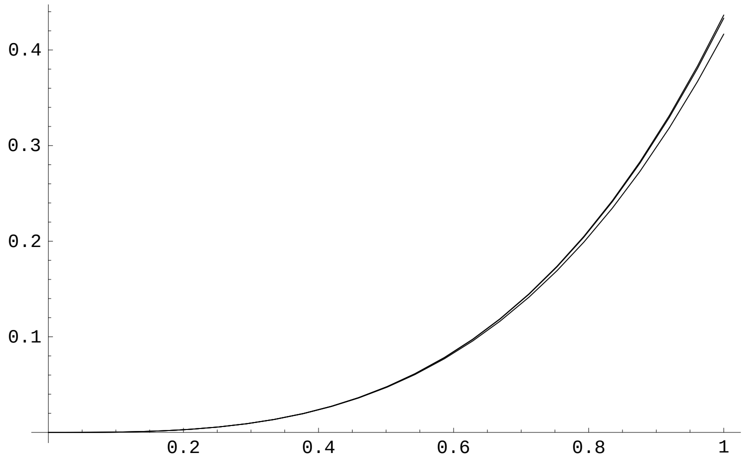
$$y_2(x) = \int_0^x \left(x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4\,,\ y_2(0.5) \doteq 0.046874\overline{9},$$

$$y_3(x) = \int_0^x \left(x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4\right) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{60}x^5\,,\ y_5(0.5) \doteq 0.047395832$$

$$y_4(x) = \int_0^x \left(x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{60}x^5\right) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{60}x^5 + \frac{x^6}{360}\,,$$

$$y_6(0.5) \doteq 0.047439234.$$

$y_4 - y_3 \doteq 0.000043402$, stačí vzít $y(0.5) \doteq 0.047439234$. Graf přesného řešení a první aproximace je na obr. 6.



Obr. 6

Eulerova metoda

Řešení rovnice $y' = f(x, y)$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$ je integrální křivka, která prochází bodem $X_0 = [x_0, y_0]$ a směrnice její tečny v bodě X_0 je $y' = f(x_0, y_0)$.

Nechť funkce f je v okolí $\mathbb{U}(X_0)$ bodu X_0 spojitá a omezená a má zde omezenou parciální derivaci podle y. Potom existuje právě jedna integrální křivka $y = y(x)$ procházející bodem X_0. Její další body budeme aproximovat na okolí $\mathbb{U}(X_0)$ pomocí vrcholů lomenné čáry.

Rozdělme interval $\langle x_0, a\rangle \subset \mathbb{U}(X_0)$ na n dílků body $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Tečna aproximované integrální křivky v bodě X_0 má rovnici

$$y = f(x_0, y_0)(x - x_0) + y_0.$$

Její průsečík s přímkou $x = x_1$ označme $X_1 = [x_1, y_1]$, kde

$$y_1 = f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + y_0.$$

Tečna integrální křivky v bodě X_1 má rovnici

$$y = f(x_1, y_1)(x - x_1) + y_1.$$

Její průsečík s přímkou $x = x_2$ označme $X_2 = [x_2, y_2]$, kde

$$y_2 = f(x_1, y_1)(x_2 - x_1) + y_1.$$

Analogicky bychom určili body $X_3, X_4, \ldots, X_n$. Lomenou čárou $X_0X_1 \ldots X_n$ aproximujeme integrální křivku diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$ v okolí počátečního bodu

X_0. Představu o tom jaká je asi přesnost této aproximace si můžeme udělat z obrázku 7.

Rekurentní vzorec aproximace, která se nazývá Eulerova metoda, je

$$y_{k+1} = f(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k) + y_k\ ,\ y_0 = y(x_0).$$

Příklad 6. *Hledejme hodnotu integrální křivky rovnice $y' = x^2 + y$, s počáteční podmínkou $y(0) = 0$, v bodě $x = 0.5$ s krokem 0.1.*

Pro jednotlivé body lomenné čáry postupně dostáváme

$X_0 = [0, 0]$,

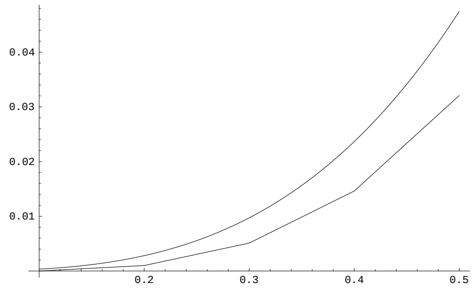
$X_1 = [0.1, 0]$,

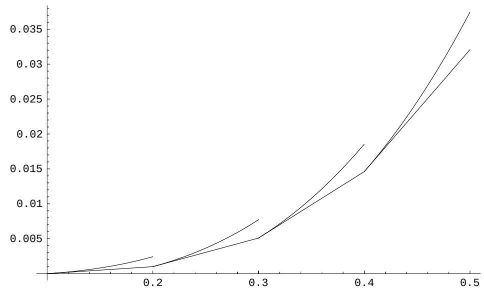
$X_2 = [0.2, 0.001]$,

$X_3 = [0.3, 0.0051]$,

$X_4 = [0.4, 0.01461]$,

$X_5 = [0.5, 0.032071]$.





Obr. 7

Na druhém obrázku v obr. 7 je vidět, že strany lomenné čáry jsou tečnami integrálních křivek s počátečním bodem v koncovém bodě předchozí strany.

Zlepšení přesnosti aproximace lze uskutečnit zmenšením kroku dělení intervalu, nebo metodou vyššího řádu.

Metody Rungovy-Kuttovy

Budeme-li předpokládat, že integrální křivka $y = y(x)$ má v okolí bodu x_0 spojité derivace do řádu $n + 1$ a funkce f pravé strany diferenciální rovnice má taktéž v okolí bodu X_0 spojité parciální derivace až do řádu n, můžeme v okolí tohoto bodu k jejímu vyjádření použít Taylorův polynom n-tého stupně

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)h + \frac{1}{2!}y''(x_0)h^2 + \cdots + \frac{1}{n!}y^{(n)}(x_0)h^n + R_n, \tag{19}$$

kde $h = x - x_0$, $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, $y''(x_0) = f_x(x_0, y_0)$, atd. Náročnost výpočtu parciálních derivací funkce f je zřejmá. Runge se jí vyhnul použitím lineární kombinace vhodných funkcí přírůstku h

$$k_n(h) = hf(x_0 + a_{n-1}h, y_0 + b_1k_1(h) + b_2k_2(h) + \cdots + b_{n-1}k_{n-1}(h))$$

pro aproximaci funkční hodnoty integrální křivky

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + c_1k_1(h) + c_2k_2(h) + \cdots + c_nk_n(h). \qquad (20)$$

Koeficienty $a_1, \ldots, a_{n-1}, b_1, \ldots, b_{n-1}, c_1, \ldots, c_n$ se určují porovnáním vzorce (20) s Taylorovým polynomem v (19). Označíme-li $F(h)$ chybu aproximace (20), tj.

$$F(h) = y(x_0+h)-y(x_0)-c_1k_1(h)-c_2k_2(h)-\cdots-c_rk_r(h) = \frac{1}{(r+1)!}y^{(r+1)}(x_0)h^{r+1}+\ldots,$$

zřejmě

$$F(0) = F'(0) = \cdots = F^{(r)}(0) = 0\,,\ F^{(r+1)}(0) \neq 0. \qquad (21)$$

Podle počtu členů v lineární kombinaci (20) určujeme řád metody, která se nazývá Rungova-Kuttova.

Rungova-Kuttova metoda 1. řádu

Ve vzorci (20) uvažujeme pouze 1. funkci k_1, tj.

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + c_1k_1(h)\,,\ k_1(h) = hf(x_0, y_0).$$

Této volbě odpovídající funkce F má tvar

$$F(h) = y(x_0 + h) - y(x_0) - c_1hf(x_0, y_0) = \frac{1}{2!}y''(x_0)h^2 + \ldots$$

a z podmínek (21), tj. $F'(0) = y'(x_0) - c_1f(x_0, y_0) = 0$, vyplývá, že $c_1 = 1$. Vzorec pro Rungovu-Kuttovu metodu 1. řádu

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hf(x_0, y_0)$$

je shodný s Eulerovým vzorcem.

Rungova-Kuttova metoda 2. řádu

V lineární kombinaci (20) vezmeme dvě první funkce. Z porovnání s Taylorovým vzorcem dostaneme hodnoty koeficientů

$$a_1 = b_1 = 1\,,\ c_1 = c_2 = \frac{1}{2}.$$

Vzorec pro $(n+1)$-ní bod aproximace integrální křivky $y = y(x)$ diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$ je

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \\ k_1 &= hf(x_n, y_n), \\ k_2 &= hf(x_n + h, y_n + k_1). \end{aligned} \tag{22}$$

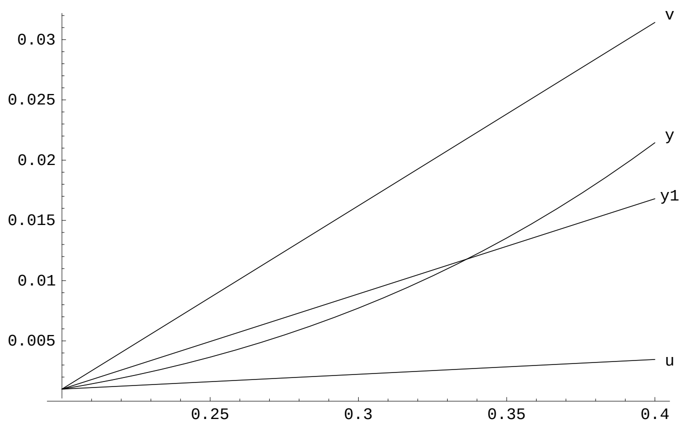
Geometrický význam vzorce (22) si ukážeme pro první dva body. Označíme

$$\begin{aligned} y_0' &= f(x_0, y_0) \implies k_1 = hy_0' \quad \text{a} \quad u = y_0 + hy_0' \\ \overline{y}_1' &= f(x_1, u) \implies k_2 = h\overline{y}_1' \quad \text{a} \quad v = y_0 + h\overline{y}_1'. \end{aligned}$$

Nyní upravíme vzorec (22) na tvar

$$y_1 = \frac{1}{2}[(y_0 + hy_0') + (y_0 + hf(x_1, y_0 + hy_0'))] = \frac{1}{2}(u + v),$$

viz obr. 8.



Obr. 8

Příklad 7. *Určeme hodnotu integrální křivky diferenciální rovnice $y' = x^2 + y$, s počáteční podmínkou $y(0) = 0$, v bodě $x = 0.5$ Rungovou-Kuttovou metodou 2. řádu.*

Pro bod X_1 je $x_1 = 0.25$ a

$$k_1 = 0\,,\ k_2 \doteq 0.015625\,,\ y_1 \doteq 0.0078125,$$

tedy $X_1 = [0.25, 0.0078125]$.

Pro bod X_2 je $x_2 = 0.5$ a

$$k_1 \doteq 0.017578125\,,\ k_2 \doteq 0.068847656\,,\ y_2 \doteq 0.05102539,$$

tedy $X_2 = [0.5, 0.05102539]$.

Rungova-Kuttova metoda 4. řádu

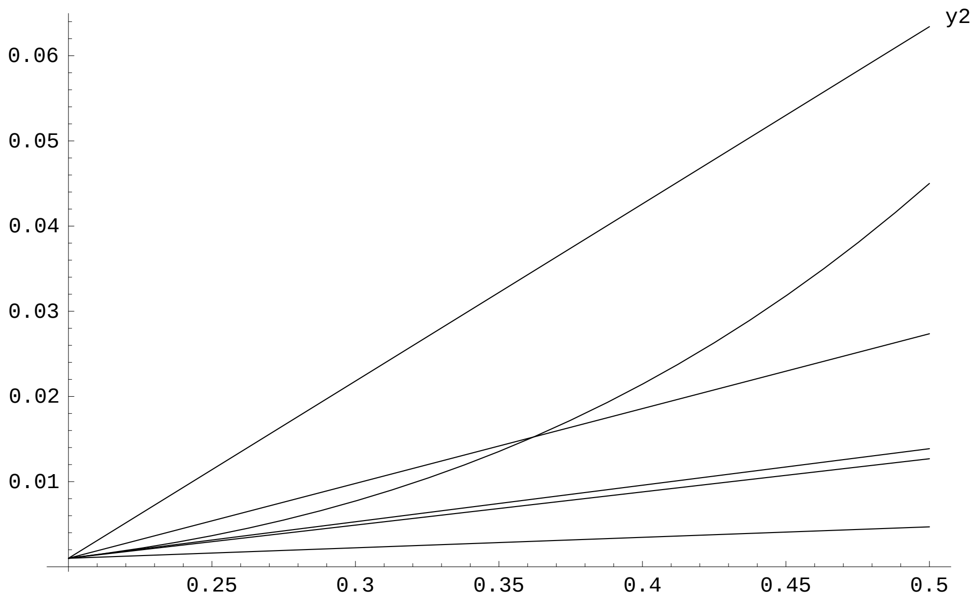
je dána vzorcem

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ k_1 &= hf(x_n, y_n), \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3). \end{aligned} \tag{23}$$

Příklad 8. *Určeme hodnotu integrální křivky diferenciální rovnice* $y' = x^2 + y$, *s počáteční podmínkou* $y(0) = 0$, *v bodě* $x = 0.5$ *Rungovou-Kuttovou metodou 4. řádu.*

Pro bod X_1 *je* $x_1 = 0.25$ *a* $k_1 = 0$, $k_2 \doteq 0.00390625$, $k_3 \doteq 0.00439453125$, $k_4 \doteq 0.016723632$, $y_1 \doteq 0.005554199125$, *tedy* $X_1 = [0.25, 0.005554199125]$.

Pro bod X_2 *je* $x_2 = 0.5$ *a* $k_1 \doteq 0.017013549$, $k_2 \doteq 0.038671493$, $k_3 \doteq 0.097381112$, $k_4 \doteq 0.088233827$, $y_2 \doteq 0.068446296$, *tedy* $X_2 = [0.5, 0.068446296]$.



Obr. 9

Porovnání Rungových-Kuttových metod 1.,2.,4. řádu.