Studijní text pro obor G+K
Katedra matematiky
Fakulta stavební
České vysoké učení technické

DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

Doc. RNDr. Milada Kočandrlová, CSc.

Lektorovali: RNDr. Milan Kočandrle, CSc., Doc. RNDr. Jaroslav Černý, CSc.
Sazba v programu AMSTEX: Doc. RNDr. Milada Kočandrlová, CSc.
Obrázky: Ing. Stanislav Olivík
Typografická úprava: Mgr. Milan Bořík, Ph.D.

2004

Další vlastnosti euklidovského prostoru

V následující kapitole se budeme zabývat zobrazeními, která uspořádané dvojici, resp. trojici, resp. n-tici reálných čísel přiřadí reálné číslo. Proto nejdříve popíšeme ty vlastnosti množin uspořádaných n-tic reálných čísel, které k tomu budeme potřebovat.

V kapitole lineární algebry jsme euklidovskou rovinu $\mathbb{E}_2$ a její zaměření $\mathbb{V}_2$, resp. euklidovský prostor $\mathbb{E}_3$ a jeho zaměření $\mathbb{V}_3$ ztotožňovali s dvojrozměrným aritmetickým prostorem $\mathbb{R}^2$, resp. trojrozměrným prostorem $\mathbb{R}^3$. Body jsme značili $A = [a_1, a_2, a_3]$ a vektory $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Definovali jsme vzdálenost dvou bodů A, B

$$|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

a velikost vektoru $\mathbf{x}$

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Tedy euklidovskou rovinu, resp. euklidovský prostor, i jejich zaměření, chápeme jako množinu uspořádaných dvojic, resp. trojic reálných čísel.

Analogicky můžeme chápat n**-rozměrný euklidovský prostor** $\mathbb{E}_n$, resp. jeho zaměření $\mathbb{V}_n$, jako množinu $\mathbb{R}^n$ uspořádaných n-tic reálných čísel, které nazýváme body a značíme $A = [a_1, \ldots, a_n]$, resp. vektory $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Analogicky definujeme vzdálenost bodů A, B a velikost vektoru $\mathbf{x}$

$$|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}\,, \quad |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Okolí bodu $A \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, o poloměru r, $r > 0$, je množina

$$\mathbb{U}(A) = \{X \in \mathbb{R}^n; |XA| < r\}.$$

Prstencové okolí bodu A je množina $\mathbb{P}(A) = \mathbb{U}(A) - \{A\}$.

Bod $A \in \mathbb{M}$, $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^n$, se nazývá **vnitřní bod** množiny $\mathbb{M}$, jestliže existuje okolí bodu A, které je částí množiny $\mathbb{M}$.

Bod $A \in \mathbb{R}^n$, k němuž existuje okolí, ve kterém neleží žádný bod množiny $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^n$, se nazývá **vnější bod** množiny $\mathbb{M}$.

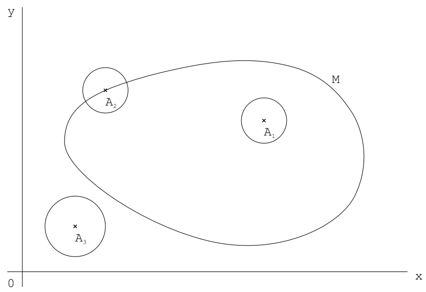
Množina všech vnitřních bodů množiny $\mathbb{M}$ se nazývá **vnitřek množiny** $\mathbb{M}$.

Můžeme tedy říci, že v rovině $\mathbb{R}^2$ je okolí bodu A vnitřek kruhu o středu v bodě A a poloměru r, v prostoru $\mathbb{R}^3$ je okolí bodu A vnitřek koule o středu v bodě A a poloměru r.

Množina $\mathbb{M}$ se nazývá **otevřená**, jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem.

Bod $A \in \mathbb{R}^n$ se nazývá **hraniční bod** množiny $\mathbb{M}$, jestliže v každém jeho okolí leží jak body množiny $\mathbb{M}$, tak body, které do ní nepatří.

Množina všech hraničních bodů množiny $\mathbb{M}$ se nazývá **hranice množiny** $\mathbb{M}$.



Obr. 1

Názorný význam uvedených pojmů je na obrázku 1. Bod A_1 je vnitřním bodem, bod A_2 je hraničním bodem a bod A_3 je vnějším bodem množiny $\mathbb{M}$.

Množina $\mathbb{M}$ se nazývá **uzavřená**, obsahuje-li svoji hranici.

Zdálo by se, že názorně můžeme říci, hranice množiny je čára, která ji ohraničuje. Ale např. vezmeme-li za množinu $\mathbb{M}$ množinu těch bodů $X = [x, y]$, které mají obě souřadnice racionální, snadno se přesvědčíme, že hranicí je celá rovina.

Množina $\mathbb{M}$ se nazývá **omezená**, jestliže existuje takové okolí jejího libovolného bodu, jehož částí je celá množina $\mathbb{M}$. Množina, která není omezená, se nazývá **neomezená**.

Bod $A \in \mathbb{R}^n$ se nazývá **hromadný bod množiny** $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^n$, jestliže každé jeho okolí obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny $\mathbb{M}$.

Funkce dvou proměnných

Funkcí dvou proměnných nazýváme každé zobrazení f množiny $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^2$ do množiny $\mathbb{R}$ reálných čísel.

Funkce dvou proměnných bude tedy pro nás dvojice množina $\mathbb{M}$ a předpis f, který každé dvojici $[x, y] \in \mathbb{M}$ přiřadí právě jedno $z \in \mathbb{R}$. Často budeme funkci zadávat jenom předpisem f a za $\mathbb{M}$ budeme brát množinu těch $[x, y] \in \mathbb{R}^2$, pro které má tento předpis smysl.

Množinu $\mathbb{M}$ nazýváme **definiční obor funkce** f, značíme $\mathbb{D}_f$. Souřadnice x, y bodu $X \in \mathbb{D}_f$ nazýváme **nezávisle proměnné** funkce f.

Množinu $\mathbb{H}_f = \{f(x, y) \in \mathbb{R}; [x, y] \in \mathbb{D}_f\}$ nazýváme **obor hodnot funkce** f. Číslo $f(x, y)$ se nazývá **hodnota funkce** f, také závisle proměnná funkce f.

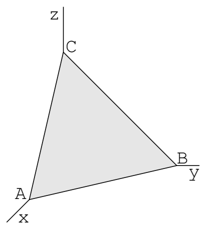
Grafem funkce f nazýváme množinu všech bodů $[x, y, f(x, y)]$ prostoru $\mathbb{R}^3$ (ve zvolené kartézské soustavě souřadnic), pro které $[x, y] \in \mathbb{D}_f$.

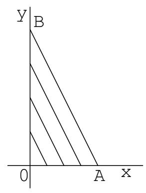
Graf funkce nám více přiblíží systém vrstevnic.

Vrstevnice funkce je množina těch bodů $[x, y] \in \mathbb{D}_f$, pro které je $f(x, y) = c$, kde $c \in \mathbb{H}_f$.

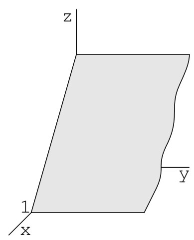
Příklad 1. Lineární funkce, *nebo její část, je dána rovnicí* $z = ax + by + c$. *Jejím grafem je rovina, nebo její část.*

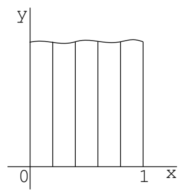
Funkce $f : z = 2 - 2x - y$ *zobrazuje množinu* $\mathbb{M} = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2-2x\}$ *na interval* $H_f = \langle 0, 2\rangle$. *Graf funkce* f *je trojúhelník* ABC, *kde* $A = [1,0,0], B = [0,2,0], C = [0,0,2]$. *Vrstevnice jsou úsečky* $2x+y = 2-c, c \in \mathbb{H}_f$ *rovnoběžné se stranou* AB.



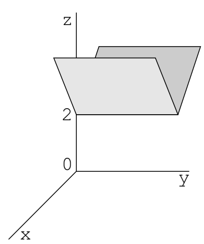


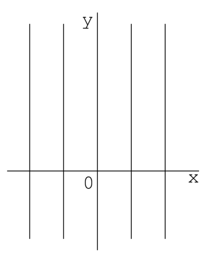
Funkce $g : z = 2 - 2x$ *zobrazuje množinu* $\mathbb{M} = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, y \geq 0\}$ *na interval* $\mathbb{H}_g = \langle 0, 2\rangle$. *Grafem je část roviny rovnoběžné s osou* y *v 1. oktantu. Vrstevnice jsou polopřímky, s počátečním bodem na ose* x *v intervalu* $\langle 0, 1\rangle$, *rovnoběžné s osou* y *v 1. kvadrantu.*



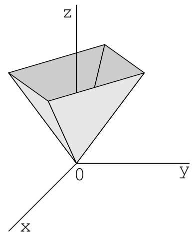


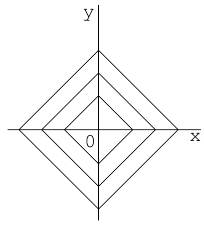
Funkce $h : z = |x| + 2$ *zobrazuje rovinu* $\mathbb{R}^2$ *na interval* $\mathbb{H}_h = \langle 2, +\infty)$. *Grafem* $h(x,y) = \begin{cases} x+2, & \text{pro } x \geq 0, y \in \mathbb{R} \\ 2-x, & \text{pro } x \leq 0, y \in \mathbb{R} \end{cases}$ *jsou dvě různoběžné poloroviny se společnou hraniční přímkou. Vrstevnice jsou přímky rovnoběžné s osou* y.





Funkce $F : z = |x| + |y|$ *zobrazuje rovinu* $\mathbb{R}^2$ *na interval* $\mathbb{H}_F = \langle 0, +\infty)$. *Grafem*
$$F(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{pro } x \geq 0, y \geq 0 \\ x-y, & \text{pro } x \geq 0, y \leq 0 \\ y-x, & \text{pro } x \leq 0, y \geq 0 \\ -x-y, & \text{pro } x \leq 0, y \leq 0 \end{cases}$$
je plášť části pravidelného čtyřbokého jehlanu. Vrstevnice jsou čtverce se středem v O.



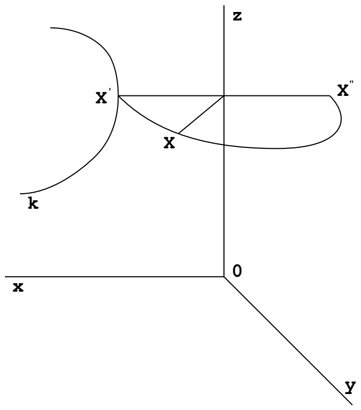


Než uvedeme další příklady funkcí, zmíníme se stručně o některých jednoduchých plochách v prostoru. Grafy mnohých funkcí dvou proměnných jsou totiž právě tyto plochy, nebo jejich části.

Rotační plochy

Předpokládejme, že v souřadnicové rovině xz máme dánu křivku (čáru) k rovnicí

$$g(x,z) = 0.$$



Obr. 2

Ze střední školy známe např. rovnici přímky a rovice kuželoseček. Budeme-li nyní křivku k otáčet kolem osy z, budou její body opisovat kružnice, v rovinách kolmých na osu z, a celá křivka k opíše plochu. Určíme její rovnici. Bod X bude ležet na rotační ploše, právě když se při otočení kolem osy z otočí do bodu X', nebo do bodu X'' křivky k, obr. 2. Má-li bod X souřadnice $[x,y,z]$, potom

$$X' = [\sqrt{x^2+y^2}, 0, z],$$

$$X'' = [-\sqrt{x^2+y^2}, 0, z].$$

Bod X tudíž leží na rotační ploše vytvořené křivkou k právě tehdy, je-li

$$g(\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0\,,\ \text{nebo}\ g(-\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0.$$

Toto jsou **obecné rovnice rotační plochy**. Speciálním případem rotačních ploch jsou **rotační kvadratické plochy**, neboli **rotační kvadriky**. Některé z nich známe ze střední školy, např. kulovou plochu (sféru), rotační válcovou nebo kuželovou plochu.

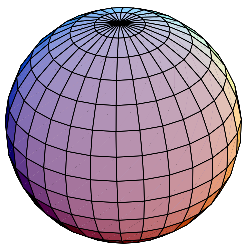
V následujícím přehledu u každé plochy uvedeme rovnici vytvořující křivky k i upravenou rovnici rotační kvadriky K.

Rotační kvadriky

Kulová plocha (sféra)

$$k : x^2 + z^2 = r^2$$

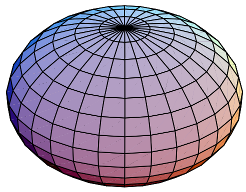
$$K : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$



Elipsoid zploštělý

$$k : \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, a > b$$

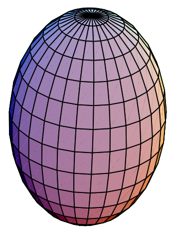
$$K : \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$



Elipsoid protáhlý

$$k : \frac{x^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1, a > b$$

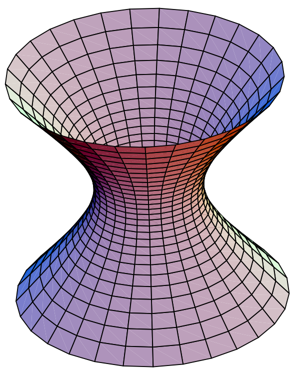
$$K : \frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$



Jednodílný hyperboloid

$$k : \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

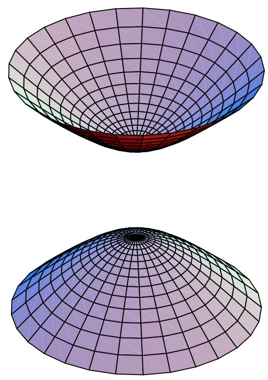
$$K : \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$



Dvoudílný hyperboloid

$$k : -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

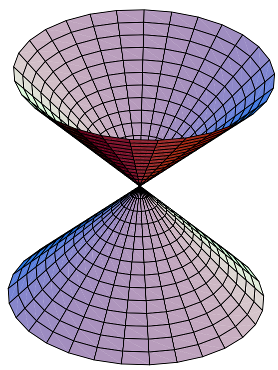
$$K : -\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$



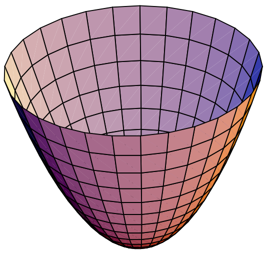
Kuželová plocha

$$k : z = ax$$

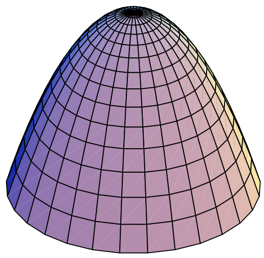
$$K : a^2(x^2 + y^2) = z^2$$



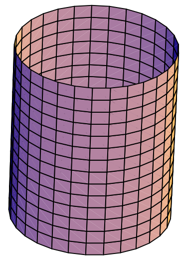
Paraboloid
$k : z = ax^2, a > 0$
$K : z = a(x^2 + y^2)$



Paraboloid
$k : z = ax^2, a < 0$
$K : z = a(x^2 + y^2)$



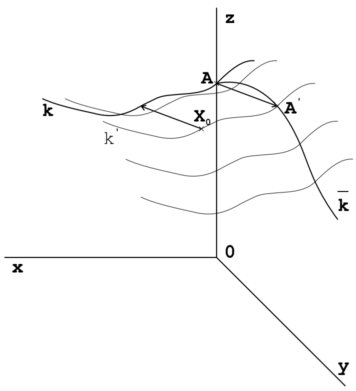
Válcová plocha
$k : x = r$
$K : x^2 + y^2 = r^2$



Translační plochy

Tak jako u ploch rotačních budeme předpokládat, že v souřadnicové rovině xz máme dánu křivku k rovnicí $g(x, z) = 0$. Dále budeme předpokládat, že je dána funkce $z = h(y)$ s definičním oborem $\mathbb{D}_h$ a její graf označíme $\overline{k}$. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že $O \in \mathbb{D}_h$ a že křivky k a $\overline{k}$ mají společný bod $A = [0, 0, h(0)]$, viz. obrázek 3.

Budeme-li křivku k posouvat tak, aby bod A se pohyboval po křivce $\overline{k}$, vytvoří všechny polohy křivky k plochu P.



Obr. 3

Takové plochy nazýváme **translační plochy**. Určíme jejich rovnici. Aby bod $X_0 = [x_0, y_0, z_0]$ ležel na ploše P, musí být obrazem nějakého bodu křivky k při posunutí (translaci), které bod A převede do bodu $A' = [0, y_0, h(y_0)]$, tj. při posunutí o vektor $\mathbf{u} = (0, y_0, h(y_0) - h(0))$. Tedy bod X_0 je bodem plochy P, jestliže obraz bodu X_0 při zpětném posunutí, tj. o opačný vektor $-\mathbf{u} = (0, -y_0, h(0) - h(y_0))$, leží na křivce k. Tedy bod $[x_0, 0, z_0 + h(0) - h(y_0)]$ vyhovuje rovnici $g(x, z) = 0$. **Rovnice translační plochy** potom je

$$g(x, z + h(0) - h(y)) = 0.$$

Jestliže křivka k bude také grafem funkce $z = \overline{g}(x)$, bude $g(x, z) = z - \overline{g}(x)$ a **rovnice**

translační plochy bude

$$z + h(0) - h(y) - \overline{g}(x) = 0.$$

Speciálním případem translačních ploch jsou opět kvadriky, válcové plochy a paraboloidy. Obecná válcová plocha je taková translační plocha, pro kterou funkce h je lineární, tedy jejím grafem $\overline{k}$ je přímka. Obecnou válcovou plochu dostaneme zřejmě tak, že všemi body křivky k vedeme rovnoběžné přímky s přímkou $\overline{k}$. První tři z následujících translačních ploch jsou plochy válcové, tudíž křivku $\overline{k}$ nemusíme uvádět.

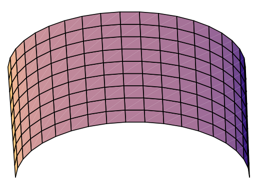
Translační kvadriky

Válcová plocha

eliptická

$k : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$

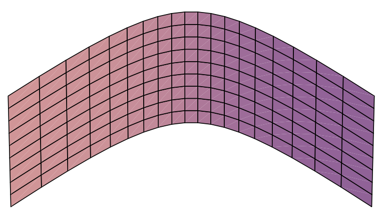
$P : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{(z-ky)^2}{b^2} = 1$



hyperbolická

$k : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 1$

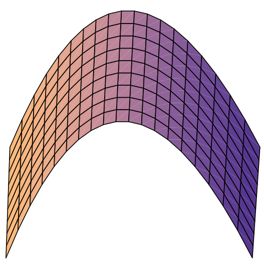
$P : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{(z-ky)^2}{b^2} = 1$



parabolická

$k : z = ax^2$

$P : z - ky = ax^2$

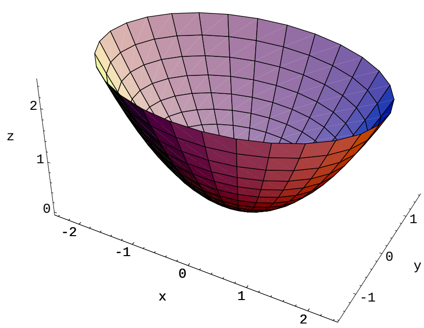


Eliptický paraboloid

$k : z = a^2x^2$, $\overline{k} : z = b^2y^2$

$P : z = a^2x^2 + b^2y^2$

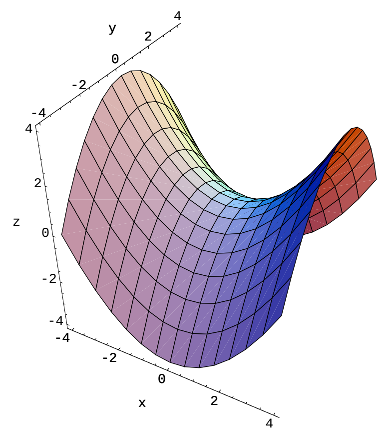
pro $a = b$ je P rotační paraboloid



Hyperbolický paraboloid

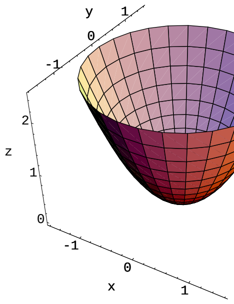
$k : z = a^2x^2$, $\overline{k} : z = -b^2y^2$

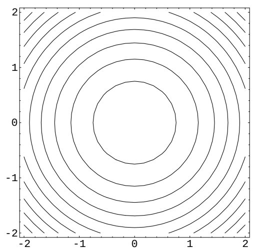
$P : z = a^2x^2 - b^2y^2$



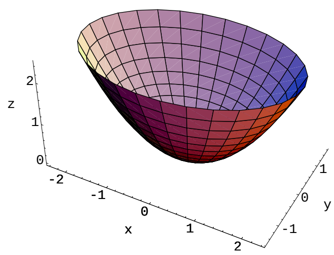
Příklad 2. Kvadratická funkce *je dána rovnicí* $z = ax^2 + by^2 + cx + dy + exy + f$, *kde aspoň jedno z čísel* a, b, e *je různé od nuly.*

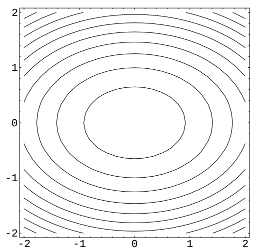
Funkce $f : z = x^2 + y^2$ *zobrazuje rovinu* $\mathbb{R}^2$ *na interval* $\langle 0, +\infty)$. *Grafem funkce* f *je rotační paraboloid, vrstevnice jsou kružnice* $x^2 + y^2 = c$, $c \geq 0$.



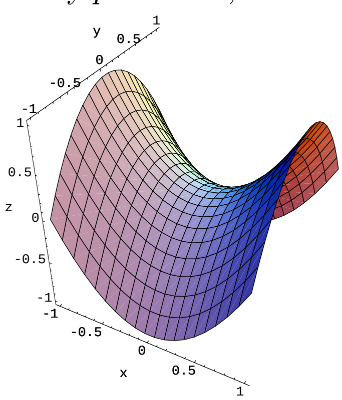


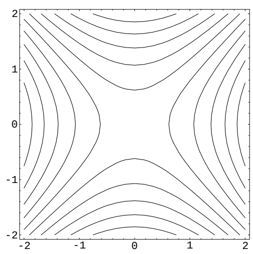
Funkce $g : z = 2x^2 + 3y^2$ *zobrazuje rovinu* $\mathbb{R}^2$ *na interval* $\langle 0, +\infty)$. *Grafem funkce* g *je eliptický paraboloid, vrstevnice jsou elipsy* $2x^2 + 3y^2 = c$, $c \geq 0$.



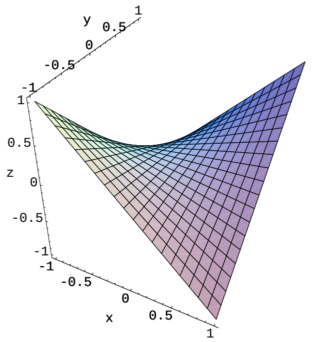


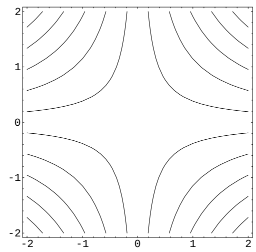
Funkce $h : z = x^2 - y^2$ *zobrazuje rovinu* $\mathbb{R}^2$ *na množinu* $\mathbb{R}$. *Grafem funkce* h *je hyperbolický paraboloid, vrstevnice jsou hyperboly* $x^2 - y^2 = c, c \in \mathbb{R}$.





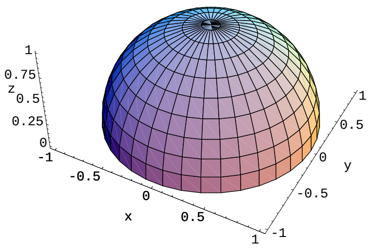
Funkce $F : z = xy$ *zobrazuje rovinu* $\mathbb{R}^2$ *na množinu* $\mathbb{R}$. *Grafem funkce* F *je hyperbolický paraboloid, vrstevnice jsou hyperboly* $xy = c, c \in \mathbb{R}$.

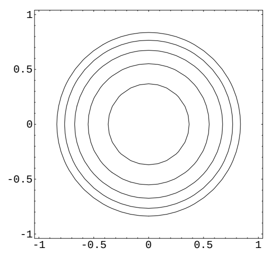




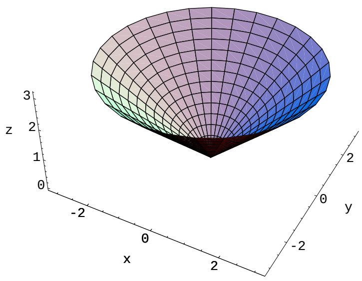
Příklad 3. Iracionální funkce

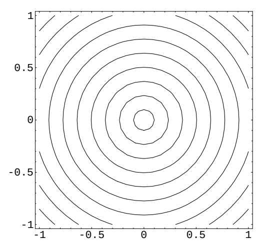
Funkce $f : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ *zobrazuje množinu* $\mathbb{M} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ *na interval* $\mathbb{H}_f = \langle 0, 1\rangle$. *Grafem funkce* f *je polosféra, vrstevnice jsou kružnice* $x^2 + y^2 = 1 - c^2, c \in \mathbb{H}_f$.



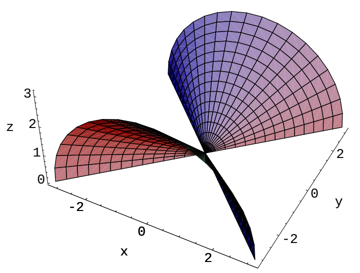


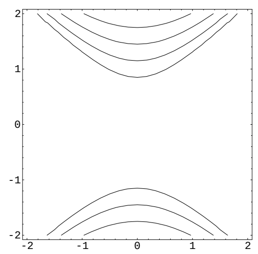
Funkce $g : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *zobrazuje rovinu* $\mathbb{R}^2$ *na interval* $\mathbb{H}_g = \langle 0, +\infty)$. *Grafem funkce* g *je část rotační kuželové plochy, vrstevnice jsou kružnice* $x^2 + y^2 = c^2, c \in \mathbb{H}_g$





Funkce $F : z = \sqrt{y^2 - x^2}$ *zobrazuje množinu* $\mathbb{M} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |y| \geq |x|\}$ *na interval* $\mathbb{H}_F = \langle 0, +\infty)$. *Grafem funkce* F *je část rotační kuželové plochy, vrstevnice jsou hyperboly* $y^2 - x^2 = c^2$, $c \in \mathbb{H}_F$.



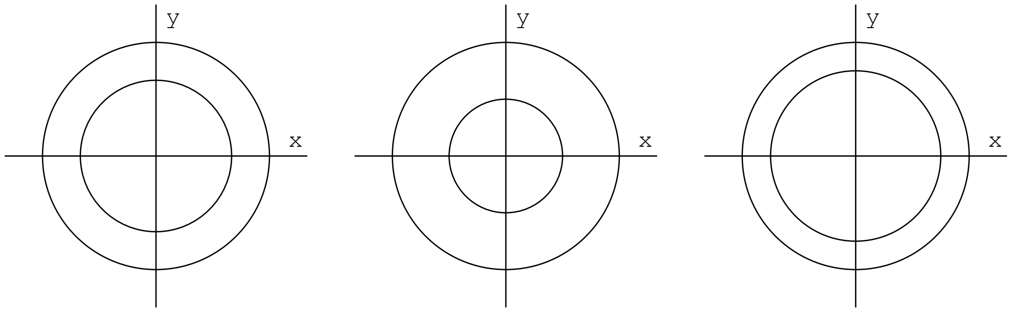


Poznámka. *V případě funkcí*

$z = x^2 + y^2 \qquad z = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

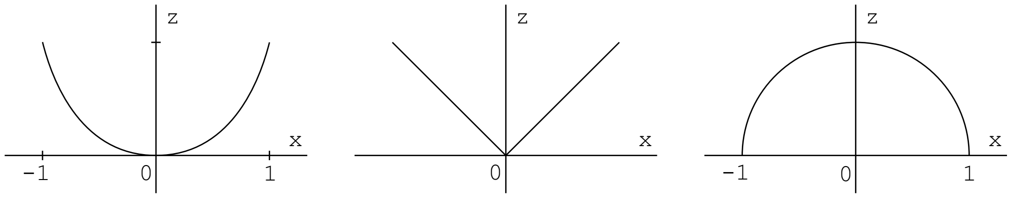
jsou vrstevnice jejich grafů kružnice

$c = x^2 + y^2 \qquad c^2 = x^2 + y^2 \qquad 1 - c^2 = x^2 + y^2$



Abychom z vrstevnic určili odpovídající graf těchto funkcí, musíme také sledovat vztah volené konstanty $z = c$ a proměnné x, případně y

$z = x^2 \qquad z = |x| \qquad 1 = x^2 + z^2$



Limita a spojitost

Pomocí limity jsme mohli u funkce jedné proměnné vyjádřit chování funkčních hodnot za situace, kdy se nezávisle proměnná "blížila" k nějakému bodu a. Limita nám tak pomohla popsat spojitost, či nespojitost funkce v bodě. Hlavní úlohu přitom hrála vzdálenost bodů jak v definičním oboru, tak v oboru hodnot funkce. Tuto vzdálenost, nebo stav, že se bod "blíží" k bodu, jsme u funkce jedné proměnné popisovali vždy v jednom směru, buď ve směru osy x, nebo ve směru osy y. U funkce dvou i více proměnných situaci "blížení" bodu X k bodu A můžeme také popisovat pomocí vzdálenosti bodů, ale směrů, ve kterých se k bodu A můžeme "blížit" je zde nekonečně mnoho. Situace je tedy složitější a my se o ní zmíníme jenom okrajově.

Připomeňme ještě, že $\mathbb{R}^*$ jsme označili rozšířenou množinu reálných čísel o dva symboly, $-\infty$ a $+\infty$.

Říkáme, že funkce f má v bodě $A \in \mathbb{R}^2$, který je hromadným bodem množiny $\mathbb{D}_f$, limitu $\alpha \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $\mathbb{U}(\alpha)$ existuje prstencové okolí $\mathbb{P}(A)$ takové, že pro každé $X \in \mathbb{P}(A) \cap \mathbb{D}_f$ je $f(X) \in \mathbb{U}(\alpha)$. Píšeme

$$\lim_{X \to A} f(X) = \alpha.$$

Funkce f je spojitá v bodě $A \in \mathbb{D}_f$, jestliže

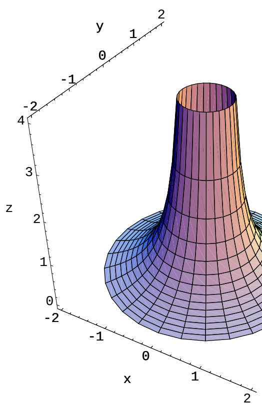
$$\lim_{X \to A} f(X) = f(A).$$

Je-li funkce f spojitá v každém bodě množiny $\mathbb{M}$, říkáme, že je spojitá na množině $\mathbb{M}$.

Limity funkcí dvou proměnných mají vlastnosti analogické k vlastnostem limit funkcí jedné proměnné.

Uveďme si několik příkladů, na kterých uvidíme, že určování limit funkcí více proměnných není vůbec snadné. Situaci sledujme na obrázcích.

Příklad 4. *Na obrázku 4 je část grafu funkce*



Obr. 4

$$z = \frac{1}{x^2 + y^2},$$

která je definovaná na celé rovině $\mathbb{R}^2$ kromě počátku $O = [0,0]$ a obor hodnot má $(0, +\infty)$. Vrstevnicemi jsou kružnice $x^2 + y^2 = \frac{1}{c}$, $c > 0$. Jejich poloměr se s neomezeně rostoucím c neomezeně zmenšuje. Zřejmě funkce v bodě O není spojitá, její limita zde je

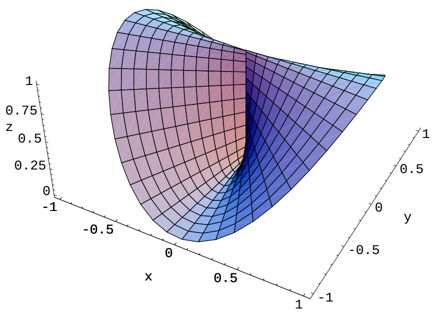
$$\lim_{X \to O} \frac{1}{x^2 + y^2} = +\infty.$$

Na obrázku 5 je část plochy, na které leží graf funkce

$$z = \frac{x^2}{x^2 + y^2}.$$

Funkce je definovaná na celé rovině $\mathbb{R}^2$ kromě počátku $O = [0,0]$ a obor hodnot má interval $\langle 0, 1 \rangle$ ($x^2 + y^2 \geq x^2$). Vrstevnicemi jsou přímky, a to pro $c = 0$ osa y, pro

$c = 1$ osa x a pro $c \in (0,1)$ rovnici $cy^2 - (1-c)x^2 = 0$ přepíšeme na součin lineárních dvojčlenů: $(y\sqrt{c} - x\sqrt{1-c})(y\sqrt{c} + x\sqrt{1-c}) = 0$. Nyní je zřejmé, že vrstevnicemi jsou různoběžné přímky.



Obr. 5

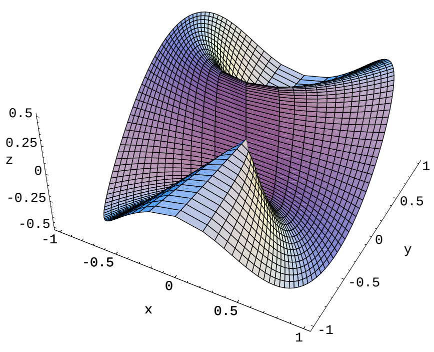
Funkce v bodě O nemá limitu, neboť blížíme-li se k počátku po ose x, má zde hodnotu 1, blížíme-li se po ose y, má zde hodnotu 0, tj.

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) = 0$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2}{x^2+y^2}\right) = 1.$$

Na obrázku 6 je část grafu funkce

$$z = \frac{x^2y}{x^4+y^2}.$$

Funkce je definovaná na celé rovině $\mathbb{R}^2$ kromě počátku $O = [0,0]$. Určíme obor hodnot. Vrstevnice jsou dány rovnicí $cy^2 - x^2y + cx^4 = 0$. Zvolíme-li v ní c, můžeme zvolit i x a řešit kvadratickou rovnici pro y. Její diskriminant je $x^4 - 4c^2x^4 = x^4(1-4c^2)$. Tudíž rovnice má řešení právě když $c \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$.



Obr. 6

Pro $c = 0$ jsou vrstevnicemi osy x, y. Tudíž blížíme-li se k počátku po těchto osách, bude limita funkce rovna nule. To bude dokonce platit i tehdy, budeme-li se k O blížit po jakékoliv přímce $y = kx$, např.

$$\lim_{X\to O}\frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{kx^3}{x^2(x^2+k^2)} = 0.$$

Avšak budeme-li se k bodu O blížit po parabole $y = x^2$, bude limita

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}.$$

Vidíme, že funkce nemá v bodě O limitu.

Parciální derivace

Derivací funkce jedné proměnné v bodě a jsme "měřili" rychlost změny funkční hodnoty při přechodu od bodu a k bodu x. Pro funkci f dvou proměnných budeme muset nejdříve zvolit směr, kterým se v rovině $\mathbb{R}^2$ vydáme z bodu A do bodu X, tj. směr, ve kterém budeme funkci f derivovat. Dříve než nadefinujeme derivaci funkce v libovolném směru, vyjděme z názorné představy derivace podle proměnných x, y.

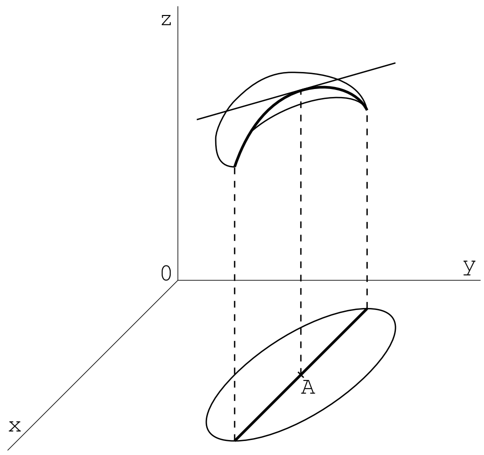
Nechť funkce $z = f(x, y)$ je definována v okolí $\mathbb{U}(A)$ bodu $A = [a, b]$. Množina bodů $[x, b] \in \mathbb{U}(A)$ určuje funkci $g(x) = f(x, b)$ jedné proměnné, obr. 7. Její vlastní derivaci v bodě a

$$g'(a) = \lim_{h_1 \to 0} \frac{g(a + h_1) - g(a)}{h_1} = \lim_{h_1 \to 0} \frac{f(a + h_1, b) - f(a, b)}{h_1}$$

říkáme **parciální derivace funkce** f **v bodě** A **podle proměnné** x a značíme ji $\dfrac{\partial f(A)}{\partial x}$, nebo krátce $f_x(A)$. Analogicky definujeme **parciální derivaci funkce** f **v bodě** A **podle proměnné** y

$$\frac{\partial f(A)}{\partial y} = \lim_{h_2 \to 0} \frac{f(a, b + h_2) - f(a, b)}{h_2}.$$

Vzhledem k tomu, že jsme parciální derivace definovali pomocí derivace funkce jedné proměnné, platí pro ně všechna pravidla pro derivace funkcí jedné proměnné.



Obr. 7

Příklad 5. *Počítejme parciální derivace funkce* $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ *v bodě* $A = [1, 2]$. *Podle definice můžeme do funkčního předpisu dosadit* $y = 2$ *a derivovat funkci proměnné* x. *Do získané derivace potom dosadíme* $x = 1$.

$$\frac{\partial z(x, 2)}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{4}} \frac{1}{2} = \frac{2}{x^2 + 4}, \quad \frac{\partial z(1, 2)}{\partial x} = \frac{2}{5}.$$

Nebo můžeme derivovat podle jedné proměnné, přitom na druhou proměnnou pohlížet jako na konstantu, a do výsledné derivace dosadit bod A. *V našem případě derivujeme podle* y *s tím, že* x *je konstanta.*

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \frac{-x}{y^2} = \frac{-x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z(1, 2)}{\partial y} = -\frac{1}{5}.$$

Derivace složené funkce

Nejdříve si připomeneme pravidlo pro derivaci složené funkce pro **funkce jedné proměnné**: Jestliže $y = f(x)$ a $x = g(t)$ jsou funkce jedné proměnné a $\mathbb{H}_g \subset \mathbb{D}_f$, můžeme sestrojit složenou funkci F takovou, že $F(t) = f(g(t))$. Potom její derivace v bodě $t_0 \in \mathbb{D}_g$ bude

$$F'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(g(t)) - f(g(t_0))}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{f(g(t)) - f(g(t_0))}{g(t) - g(t_0)} \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}. \tag{1}$$

Existují-li derivace $f'(g(t_0))$ a $g'(t_0)$, plyne z rovnosti (1) známý vzorec

$$F'(t_0) = \frac{df}{dx}(g(t_0)) \cdot g'(t_0).$$

Nechť $f : z = f(x, y)$ je **funkcí dvou proměnných** a $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ jsou **funkce jedné proměnné**, $\mathbb{D}_\varphi = \mathbb{D}_\psi$ a $\mathbb{H}_\varphi \times \mathbb{H}_\psi \subset \mathbb{D}_f$.

Potom můžeme opět sestrojit složenou funkci F takovou, že $F(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$. Pro $t_0 \in \mathbb{D}_\varphi$ existuje okolí $\mathbb{U}(t_0) \subset \mathbb{D}_\varphi$ takové, že pro každé $t \in \mathbb{U}(t_0)$ je $X = [\varphi(t), \psi(t)] \in \mathbb{D}_f$. Podle (1), abychom určili derivaci složené funkce F, počítáme limitu

$$F'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(\varphi(t), \psi(t)) - f(\varphi(t_0), \psi(t_0))}{t - t_0}. \tag{2}$$

Pokud by např. φ byla konstantní, blížili bychom se s bodem X k bodu $A = [\varphi(t_0), \psi(t_0)]$ po rovnoběžce s osou y a mohli bychom využít parciální derivace funkce f. To v obecném případě neplatí. Proto přírůstek funkce f ve (2) upravíme na tvar

$$f(\varphi(t), \psi(t)) - f(\varphi(t), \psi(t_0)) + f(\varphi(t), \psi(t_0)) - f(\varphi(t_0), \psi(t_0)).$$

Vzorec (2) pak bude mít tvar

$$F'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \left(\frac{f(\varphi(t), \psi(t_0)) - f(\varphi(t_0), \psi(t_0))}{t - t_0} + \frac{f(\varphi(t), \psi(t)) - f(\varphi(t), \psi(t_0))}{t - t_0} \right).$$

Jestliže derivace funkcí φ a ψ jsou spojité v bodě t_0 a parciální derivace funkce f jsou spojité v bodě A, můžeme limitu součtu dvou zlomků nahradit součtem limit a každou z nich upravit podle vzorce (1). Derivace složené funkce $F(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$ v bodě t_0 je rovna

$$F'(t_0) = \frac{\partial f(A)}{\partial x} \cdot \varphi'(t_0) + \frac{\partial f(A)}{\partial y} \cdot \psi'(t_0). \tag{3}$$

Tento vzorec bude platit i za obecnějších předpokladů.

Jsou-li funkce φ a ψ **funkce dvou proměnných** u, v, potom pro výpočet derivací složené funkce

$$F(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

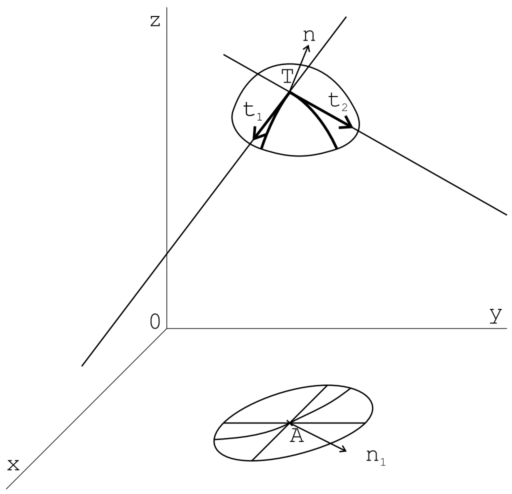
v bodě $[u_0, v_0]$, ve kterém mají funkce φ, ψ spojité derivace a funkce f má spojité derivace v bodě $A = [\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0)]$, použijeme vzorec (3)

$$\begin{aligned}\frac{\partial F(u_0, v_0)}{\partial u} &= \frac{\partial f(A)}{\partial x}\frac{\partial \varphi(u_0, v_0)}{\partial u} + \frac{\partial f(A)}{\partial y}\frac{\partial \psi(u_0, v_0)}{\partial u},\\ \frac{\partial F(u_0, v_0)}{\partial v} &= \frac{\partial f(A)}{\partial x}\frac{\partial \varphi(u_0, v_0)}{\partial v} + \frac{\partial f(A)}{\partial y}\frac{\partial \psi(u_0, v_0)}{\partial v}.\end{aligned} \tag{4}$$

Geometrický význam parciálních derivací

Gradient

Nechť funkce f má v bodě $A = [a, b]$ spojité parciální derivace podle obou proměnných.



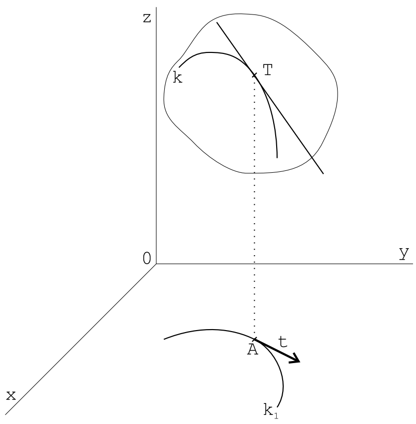
Obr. 8

Parciální derivace $f_x(A)$, určuje směrnici tečny řezu grafu funkce f v bodě $T = [a, b, f(a, b)]$ rovinou $y = b$. Analogicky parciální derivace $f_y(A)$ určuje směrnici tečny řezu grafu funkce f v bodě T rovinou $x = a$, viz obrázek 8. Směrové vektory těchto tečen jsou

$$\mathbf{t}_1 = \left(1, 0, \frac{\partial f(A)}{\partial x}\right),$$

$$\mathbf{t}_2 = \left(0, 1, \frac{\partial f(A)}{\partial y}\right).$$

Každou křivku v rovině xy můžeme vyjádřit parametrickými rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Nechť k_1 je taková křivka z definičního oboru funkce f, obr. 9.



Obr. 9

Té odpovídá na grafu funkce f křivka k s parametrickým vyjádřením

$$P(t) = [\varphi(t), \psi(t), f(\varphi(t), \psi(t))].$$

Její tečný vektor v bodě t_0 je

$$P'(t_0) = \left(\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \frac{df(\varphi(t), \psi(t))}{dt}(t_0)\right).$$

Je-li $\varphi(t_0) = a$, $\psi(t_0) = b$, vyplývá ze vzorce (3)

$$P'(t_0) = \varphi'(t_0)\,\mathbf{t}_1 + \psi'(t_0)\,\mathbf{t}_2.$$

Tudíž tečné vektory všech křivek, procházejících bodem $[a, b, f(\varphi(t_0), \psi(t_0))]$, vyplní rovinu τ. Rovina τ se nazývá **tečná rovina** grafu funkce f. Vektory $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$ určují její zaměření. Rovnice tečné roviny τ je

$$\frac{\partial f(A)}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f(A)}{\partial y}(y - b) - (z - f(A)) = 0. \tag{5}$$

Vektor

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial f(A)}{\partial x}, \frac{\partial f(A)}{\partial y}, -1\right)$$

je **normálový vektor grafu funkce** f **v bodě** T. Kolmý průmět $\mathbf{n}_1$ vektoru $\mathbf{n}$ do souřadnicové roviny xy, obr. 8, je vektor

$$grad\, f(A) = \left(\frac{\partial f(A)}{\partial x}, \frac{\partial f(A)}{\partial y}\right), \tag{6}$$

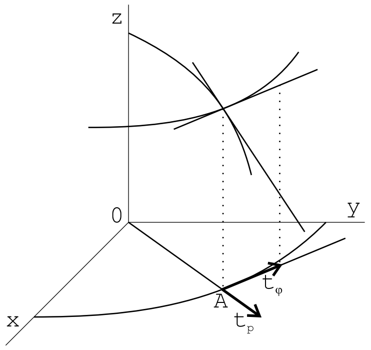
který nazýváme **gradient funkce** f **v bodě** A. Pro $z = f(A)$ je množina bodů $\{[x, y] \in \mathbb{D}_f; f(x, y) = f(A)\}$ vrstevnice grafu funkce f v bodě A. Dosadíme-li též do rovnice (5) tečné roviny, dostáváme

$$\frac{\partial f(A)}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f(A)}{\partial y}(y - b) = 0$$

tečnu této vrstevnice. Tedy gradient funkce f v bodě A je normálovým vektorem vrstevnice v bodě A.

Příklad 6. *Geometrický význam derivace složené funkce dvou proměnných si ukážeme na polárních souřadnicích. Funkce*

$$x = x(\varrho, \varphi) = \varrho \cos \varphi\,, \quad y = y(\varrho, \varphi) = \varrho \sin \varphi\,,$$



Obr. 10

jsou definované na rovině $\mathbb{R}^2$. Jejich derivace určují tečné vektory souřadnicových křivek, kružnic a polopřímek, obr. 10,

$$\mathbf{t}_\varphi = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}\right), \quad \mathbf{t}_\varrho = \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho}, \frac{\partial y}{\partial \varrho}\right).$$

Nechť funkce $z = f(x, y)$ je definována v okolí bodu $A = [x(\varrho_0, \varphi_0), y(\varrho_0, \varphi_0)]$ a má v něm spojité parciální derivace. Potom parciální derivace složené funkce $F(\varrho, \varphi) = f(x(\varrho, \varphi), y(\varrho, \varphi))$ podle (4) jsou

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\varrho_0, \varphi_0)}{\partial \varrho} &= \frac{\partial f(A)}{\partial x} \cos \varphi_0 + \frac{\partial f(A)}{\partial y} \sin \varphi_0\,, \\ \frac{\partial F(\varrho_0, \varphi_0)}{\partial \varphi} &= \frac{\partial f(A)}{\partial x} (-\varrho_0 \sin \varphi_0) + \frac{\partial f(A)}{\partial y} \varrho_0 \cos \varphi_0. \end{aligned} \tag{7}$$

Příklad 7. *V mnohých úlohách je výhodnější pracovat právě s polárními souřadnicemi než se souřadnicemi kartézskými. Např. rovnice*

$$y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

transformovaná do polárních souřadnic bude mít jednodušší tvar. O tom se přesvědčíme, jestliže soustavu rovnic (7) vyřešíme pro neznámé parciální derivace f_x a f_y. Soustava rovnic (7) přepsaná do maticového tvaru v obecném bodě je

$$\begin{pmatrix} F_\varrho \\ F_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi, & \sin \varphi \\ -\varrho \sin \varphi, & \varrho \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}.$$

Vynásobením inverzní maticí zleva dostaneme neznámé parciální derivace

$$\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\varrho} \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi, & -\sin \varphi \\ \varrho \sin \varphi, & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_\varrho \\ F_\varphi \end{pmatrix}.$$

Dosazením se přesvědčíme, že daná rovnice transformovaná do polárních souřadnic má tvar

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0.$$

Derivace v jednotkovém směru a gradient funkce

Vzorec (3) můžeme přepsat na tvar

$$F'(t_0) = \left(\frac{\partial f(A)}{\partial x}, \frac{\partial f(A)}{\partial y}\right) (\varphi'(t_0), \psi'(t_0)) = grad\, f(A) \cdot \mathbf{t},$$

kde vektor **t** určuje zaměření společné tečny všech křivek z definičního oboru funkce f procházejících bodem A. Tedy násobek vektoru **t** určuje násobek derivace. Mezi těmito derivacemi zvolíme tu, která je určena jednotkovým vektorem $\mathbf{u} = \mathbf{t}/|\mathbf{t}|$ a nazveme ji **derivace funkce** f **v bodě** A **ve směru u** a píšeme

$$\frac{d\,f(A)}{d\,\mathbf{u}} = \mathbf{u} \cdot grad\,f(A). \tag{8}$$

Bude-li vektor **u** jednotkovým vektorem souřadnicových os x, y, dostaneme ze vzorce (8) parciální derivace funkce f podle proměnných x, y.

Ptejme se, zda existuje směr, ve kterém je derivace (8) maximální, resp. minimální. Upravme proto vzorec (8) na tvar

$$\frac{df(A)}{d\mathbf{u}} = |\mathbf{u}||grad\,f(A)|\cos\varphi,$$

kde φ je úhel obou vektorů. Derivace funkce f v bodě A ve směru **u** bude maximální, resp. minimální, jestliže $\varphi = 0$, resp. $\varphi = \pi$. Tedy derivace funkce je maximální, resp. minimální, jestliže derivujeme ve směru

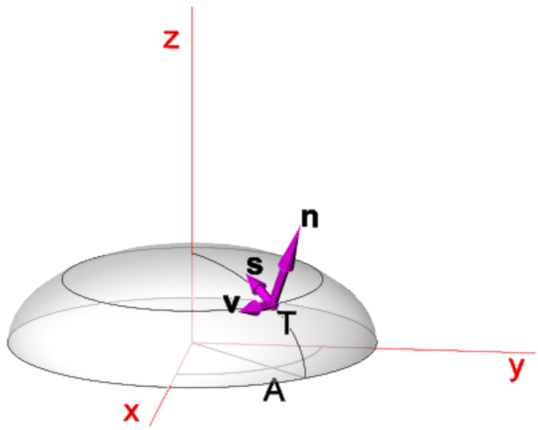
$$\mathbf{u} = \frac{1}{|grad\,f(A)|}\,grad\,f(A)$$

gradientu, tj. ve směru kolmém na vrstevnici. Toto maximum, resp. minimum je rovno $|grad\,f(A)|$, resp. $-|grad\,f(A)|$.

Tak v bodě T grafu funkce f dostáváme tři ortogonální vektory:

- ⋆ $\mathbf{n} = \left(\frac{\partial f(A)}{\partial x}, \frac{\partial f(A)}{\partial y}, -1\right)$ nomálový vektor,
- ⋆ $\mathbf{v} = \left(-\frac{\partial f(A)}{\partial y}, \frac{\partial f(A)}{\partial x}, 0\right)$ vektor tečny vrstevnice,
- ⋆ $\mathbf{s} = \left(\frac{\partial f(A)}{\partial x}, \frac{\partial f(A)}{\partial y}, |grad\,f(A)|^2\right)$ vektor největšího spádu, tj. vektor tečny spádnice.

Příklad 8. *Funkce* $z = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ *má definiční obor* $\mathbb{D}_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4\}$ *a obor hodnot* $\mathbb{H}_f = \langle 0, 1\rangle$*. Parciální derivace v bodě* $A = [1, 1]$ *jsou*



Obr. 11

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{2\sqrt{4-x^2-y^2}}\,, \; \frac{\partial z(A)}{\partial x} = \frac{-\sqrt{2}}{4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{2\sqrt{4-x^2-y^2}}\,, \; \frac{\partial z(A)}{\partial y} = \frac{-\sqrt{2}}{4}$$

$$grad\, f(A) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{4}, \frac{-\sqrt{2}}{4}\right),$$

$$|grad\, f(A)|^2 = \frac{1}{4}.$$

Potom trojice ortogonálních vektorů v bodě $T = [1, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}]$, obr. 11, je

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, 1\right)\,, \; \mathbf{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, 0\right)\,, \; \mathbf{s} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

Parciální a totální diferenciály funkce

Diferencovatelná funkce

Vlastní parciální derivace podle x, resp. y určuje směrnici tečny řezu grafu funkce f rovinou rovnoběžnou se souřadnicovou rovinou xz, resp. yz. Lineární funkce

$$d_{x,A}f(h_1) = \frac{\partial f(A)}{\partial x}h_1\,, \text{ resp. } d_{y,A}f(h_2) = \frac{\partial f(A)}{\partial y}h_2$$

jsou **parciální diferenciály** funkce f v bodě A vzhledem k ose x, resp. y. Tedy stejně jako pro funkci jedné proměnné můžeme přírůstky funkce f v okolí bodu A ve směrech souřadnicových os aproximovat parciálními diferenciály, tj.

$$f(a+h_1, b) - f(a,b) \doteq d_{x,A}f(h_1)\,, \text{ resp. } f(a, b+h_2) - f(a,b) \doteq d_{y,A}f(h_2).$$

Říkáme, že funkce f je v bodě $A = [a, b]$ **diferencovatelná**, jestliže existuje okolí $\mathbb{U}(A) \subset \mathbb{D}_f$, ve kterém lze její přírůstek vyjádřit ve tvaru

$$f(X) - f(A) = K_1(x-a) + K_2(y-b) + \omega_1(X)(x-a) + \omega_2(X)(y-b), \qquad (9)$$

kde $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ a funkce ω_1, ω_2 jsou v bodě A spojité a mají v něm hodnotu nula.

Nechť platí (9), potom funkce f je v bodě A spojitá, neboť

$$\lim_{X \to A} f(X) = f(A).$$

Upravíme-li (9) tak, že dosadíme $y = b$, resp. $x = a$, tj.

$$\frac{f(x,b) - f(a,b)}{x - a} = K_1 + \omega_1(x,b)\,, \text{ resp. } \frac{f(a,y) - f(a,b)}{y - b} = K_2 + \omega_2(a,y)\,,$$

potom limitním přechodem pro $x \to a$, resp. $y \to b$, vzhledem k tomu, že funkce ω_1, ω_2 mají v bodě A limitu nula, dostáváme

$$K_1 = \frac{\partial f(A)}{\partial x}\,, \quad K_2 = \frac{\partial f(A)}{\partial y}.$$

Tedy **nutná podmínka diferencovatelnosti funkce** je

Je-li funkce f v bodě A diferencovatelná, potom má v bodě A parciální derivace.

Výraz

$$d_A f(x,y) = \frac{\partial f(A)}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f(A)}{\partial y}(y - b) \tag{10}$$

nazýváme **totální diferenciál funkce** f v bodě A.

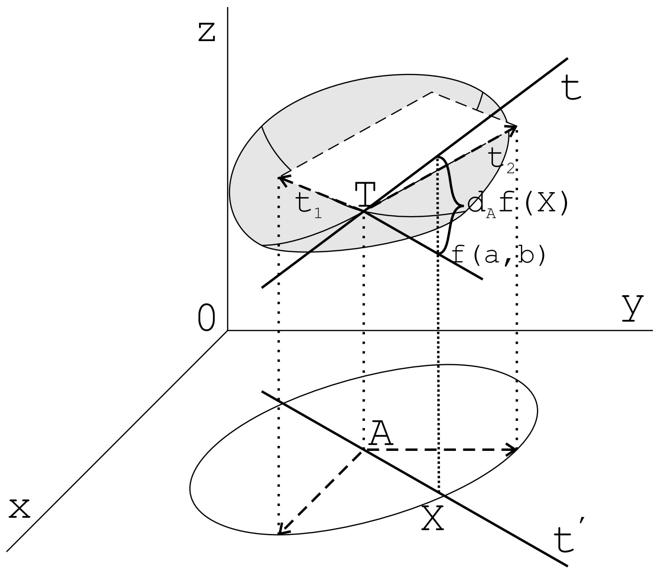
Postačující podmínka diferencovatelnosti je spojitost parciálních derivací funkce f v bodě A.

Vektor $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$, který má umístění $X - A = (x - a, y - b)$, je vektorem diferenciálních ("dostečně malých") přírůstků $dx\,, dy$ nezávisle proměnných x, y. Potom přírůstek (diferenci) závisle proměnné z můžeme aproximovat totálním diferenciálem

$$dz = f(x,y) - f(a,b) \doteq d_A f(X). \tag{11}$$

Vzorec (11) se nazývá **obecný zákon hromadění skutečných chyb**. Maximální chyba aproximace (11) je

$$|dz| \leq \left|\frac{\partial f(A)}{\partial x}\right| |dx| + \left|\frac{\partial f(A)}{\partial y}\right| |dy|.$$



Obr. 12

Geometrický význam totálního diferenciálu je zřejmý, obr. 12. Totální diferenciál (10) je lineární funkce. Jejím grafem je rovina

$$z = f_x(A)(x-a) + f_y(A)(y-b).$$

Porovnáním této rovnice s rovnicí (5) je zřejmé, že je rovnoběžná s tečnou rovinou grafu funkce f v bodě $T = [a, b, f(A)]$. Je-li funkce f diferencovatelná v bodě A, je tečná rovina jejího grafu v bodě T dána rovnicí (5).

Graf funkce f v okolí bodu $A = [a, b]$ aproximujeme jeho tečnou rovinou v bodě T, tj.

$$f(x,y) \doteq f(a,b) + \frac{\partial f(A)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f(A)}{\partial y}(y-b).$$

Příklad 9. *Určeme chybu při výpočtu délky úhlopříčky obdélníka, jehož strany $a = 8m$, $b = 6m$ byly měřeny s chybou $da = -5mm$, $db = 2mm$. Pro přírůstek délky úhlopříčky podle (10) je*

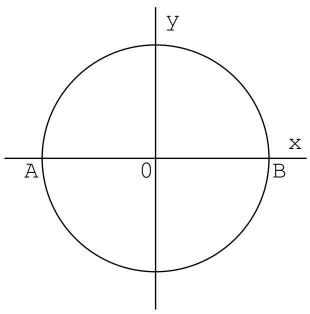
$$du = \frac{\partial u(8,6)}{\partial a}\,da + \frac{\partial u(8,6)}{\partial b}\,db = \frac{1}{\sqrt{64+36}}(-8 \cdot 0.005 + 6 \cdot 0.002) = -0.0028m.$$

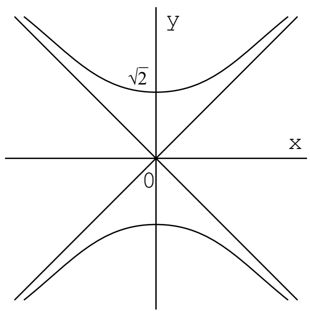
Chyba výpočtu délky úhlopříčky je menší než 3mm.

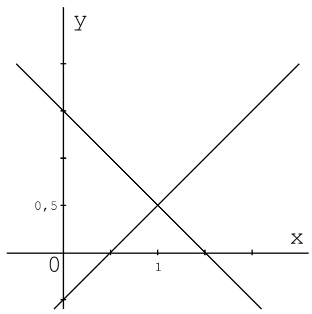
Implicitní funkce jedné proměnné

Hledejme odpověď na otázku, kdy lze rovnicí $F(x,y) = 0$ určit funkci $y = y(x)$, nebo funkci $x = x(y)$, jedné reálné proměnné. To jest, kdy lze z této rovnice některou z proměnných vypočítat jednoznačně v závislosti na druhé proměnné. Z některých rovnic umíme takovou funkci vypočítat i nakreslit množinu bodů $[x,y] \in \mathbb{R}^2$, které jsou takovou rovnicí určeny. Např. z rovnice $y^3 - x^2 = 0$ vypočítáme $y = x^{\frac{2}{3}}$. U následujících tří rovnic se nám to nepodaří.

$x^2 + y^2 - 4 = 0$ $\qquad$ $x^2 - y^2 + 2 = 0$ $\qquad$ $4x^2 - 4y^2 - 8x + 4y + 3 = 0$







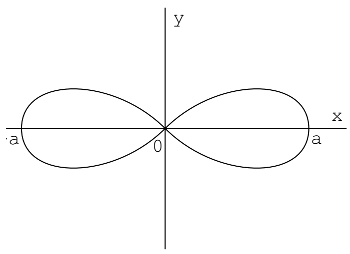
V prvním případě rovnice popisuje kružnici se středem v počátku a s poloměrem 2. Z rovnice umíme vypočítat $|y| = \sqrt{4 - x^2}$, tj. rovnicí je dána funkce $y = \sqrt{4 - x^2}$ na intervalu $\langle -2, 2\rangle$ (nebo na jeho podintervalu). Ale také funkce $y = -\sqrt{4 - x^2}$ na intervalu $\langle -2, 2\rangle$ (nebo na jeho podintervalu). Je ale zřejmé, že tuto dvojznačnost lze odstranit, jestliže přidáme podmínku na množinu bodů $[x, y]$, ve které příslušnou rovnici řešíme, např. $y > 0$.

Vidíme také, že v okolí bodů $A = [-2, 0]$ a $B = [2, 0]$ neexistuje funkce $y = y(x)$, která by byla danou rovnicí určena. Je ale zřejmé, že v okolí těchto bodů bychom mohli vyjádřit x jako funkci y.

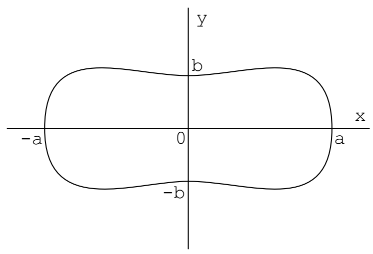
Druhá rovnice určuje rovnoosou hyperbolu a třetí rovnice dvě různoběžné přímky. Sami určete jak vypadají funkce těmito rovnicemi určené a zda tyto funkce vůbec existují. Najděte též body, v jejichž okolí funkce jedné proměnné určena není.

Jak jsme viděli existují rovnice, popisující křivky v rovině, z kterých se nám nepodaří vypočítat y, ani x, a přesto bychom chtěli o nich vědět více. Např. jak vypadají tečny, či normály, v jejich bodech a v kterých bodech funkce jedné proměnné neexistuje. V uvedených příkladech to byla křivka tvořená dvěma různoběžkami. V žádném okolí jejich průsečíku se nám nepodaří vyjádřit y jako funkci x, nebo x jako funkci y. Na dalších obrázcích vidíme další křivky, které mají tuto vlastnost. První je Bernoulliova lemniskata a druhá Helmertova křivka.

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$$



$$(x^2 + y^2)^2 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0$$



U obou křivek je tímto kritickým, nebo také **singulárním bodem** počátek O. U Helmertovy křivky navíc platí, že existuje prstencové okolí počátku, na kterém vůbec žádný bod křivky neleží. Bod O je tzv. **izolovaný bod** křivky.

Z uvedených příkladů můžeme usoudit, že rovnicí $F(x, y) = 0$ bude určena funkce $y = y(x)$ v okolí těch bodů $A = [a, b]$, $F(a, b) = 0$, ve kterých tečna není rovnoběžná s osou y, tj. v bodech A, ve kterých vektory $grad\, F(A)$ a $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ nejsou lineárně závislé. **Rovnice tečny** v bodě A, neboť $F(x, y) = 0$ je nulová vrstevnice funkce $z = F(x, y)$, je

$$\frac{\partial F(A)}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial F(A)}{\partial y}(y - b) = 0.$$

Derivováním složené funkce $z = F(x, y(x))$ podle proměnné x dojdeme ke stejné rovnici a navíc uvidíme, že požadavek na to, aby gradient nebyl kolmý na osu y je nutný. Pro derivaci funkce F podle x podle vzorce (3) platí

$$\frac{\partial F(A)}{\partial x} + \frac{\partial F(A)}{\partial y} y'(a) = 0.$$

Potom rovnice tečny grafu funkce $y = y(x)$ v bodě A je

$$y = -\frac{F_x(A)}{F_y(A)}(x - a) + b,$$

kde zřejmě $F_y(A) \neq 0$. Snadno ověříme, že obě rovnice určují stejnou přímku.

Rovnice

$$\frac{\partial F(A)}{\partial y}(x - a) - \frac{\partial F(A)}{\partial x}(y - b) = 0$$

určuje přímku v bodě A, která je kolmá na tečnu. Taková přímka se nazývá **normála** křivky v bodě A.

Můžeme tedy říci, jestliže pro funkci F platí $F(a, b) = 0$, v okolí $\mathbb{U}(A)$ bodu $A = [a, b]$ má spojité parciální derivace a $F_y(A) \neq 0$, potom existuje právě jedna funkce $f : y = y(x)$, pro kterou platí

1. f je definovaná v $\mathbb{U}(a)$ a $y(a) = b$,
2. $F(x, y(x)) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{U}(a)$,
3. f má v okolí $\mathbb{U}(a)$ spojitou derivaci, která je rovna $y'(x) = -\dfrac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$.

Příklad 10. *Určíme množinu všech pat kolmic ze středu elipsy*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

na její tečny. Gradient funkce $F(x, y) = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2$ v jejím bodě $X = [x_0, y_0]$ je vektor $grad\, F(x_0, y_0) = (2b^2x_0, 2a^2y_0)$. Potom tečna v bodě X_0 a kolmice z bodu O na ni je

$$b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2,$$
$$a^2y_0x - b^2x_0y = 0.$$

Z obou rovnic vypočítáme souřadnice x_0, y_0 bodu X_0 elipsy

$$x_0 = \frac{a^2x}{x^2 + y^2}, \quad y_0 = \frac{b^2y}{x^2 + y^2}.$$

Dosazením do rovnice elipsy dostaneme rovnici Helmertovy křivky

$$a^2x^2 + b^2y^2 = (x^2 + y^2)^2.$$

Parciální derivace vyšších řádů

Nechť funkce $z = f(x, y)$ má parciální derivace

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad f_y(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y},$$

v každém bodě množiny $\mathbb{M} \subset \mathbb{D}_f$. Ty jsou opět funkcemi dvou proměnných. Existují-li parciální derivace funkcí f_x a f_y v bodě $A \in \mathbb{M}$

$$\begin{aligned}
f_{xx}(A) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}(A) = \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2}, \\
f_{yx}(A) &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}(A) = \frac{\partial^2 f(A)}{\partial y \partial x}, \\
f_{xy}(A) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}(A) = \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x \partial y}, \\
f_{yy}(A) &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}(A) = \frac{\partial^2 f(A)}{\partial y^2},
\end{aligned}$$

nazýváme je **parciální derivace 2. řádu** funkce f v bodě A, nebo jenom druhé parciální derivace. Přitom f_{xy} a f_{yx} se nazývají **smíšené parciální derivace 2. řádu**.

Analogicky bychom definovali derivace 3. až n-tého řádu.

Příklad 11. *Parciální derivace funkce $f(x, y) = e^x \cos y$ v každém bodě $\mathbb{R}^2$ jsou*

$$f_x(x, y) = e^x \cos y, \quad f_y(x, y) = -e^x \sin y.$$

Parciální derivace 2. řádu funkce f v libovolném bodě $X \in \mathbb{R}^2$ jsou

$$f_{xx}(X) = e^x \cos y, \quad f_{yx}(X) = -e^x \sin y = f_{xy}(X), \quad f_{yy}(X) = -e^x \cos y.$$

Rovnost smíšených parciálních derivací

Pro smíšené parciální derivace platí: Má-li funkce f v okolí bodu A parciální derivace, které jsou v bodě A diferencovatelné, potom platí

$$\frac{\partial^2 f(A)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(A)}{\partial y \partial x}.$$

Jsou-li parciální derivace 2. řádu funkce f v bodě A spojité, potom parciální derivace 1. řádu funkce f jsou diferencovatelné a platí rovnost smíšených parciálních derivací 2. řádu.

Diferenciály vyšších řádů

Nechť funkce $z = f(x, y)$ má v okolí bodu $A = [a, b]$ spojité parciální derivace do n-tého řádu. Označíme $\mathbf{h} = (h_1, h_2) = (x - a, y - b)$ vektor přírůstků nezávisle proměnných. Složená funkce $F(t) = f(a + th_1, b + th_2)$ definovaná na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ má podle vzorce (3) derivaci

$$F'(t) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} h_2.$$

Druhá derivace funkce F je opět podle vzorce (3)

$$F''(t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} h_2\right) h_1 + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} h_2\right) h_2.$$

Druhá derivace F'' funkce F v bodě $t = 0$

$$d^2 f_A(\mathbf{h}) = \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2} h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f(A)}{\partial x \partial y} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f(A)}{\partial y^2} h_2^2 . \tag{12}$$

se nazývá **totální diferenciál 2. řádu funkce f v bodě** A.

Analogicky bychom mohli definovat diferenciály dalších řádů. Výpočet je ale složitý vzhledem k množství derivací, nebudeme se tím dále zabývat.

Přepišme si rovnost (12), za předpokladu $f_{xx} \neq 0$, na tvar

$$d^2 f_A(\mathbf{h}) = f_{xx}\left(h_1 + \frac{f_{xy}}{f_{xx}} h_2\right)^2 + \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{f_{xx}} h_2^2.$$

Zřejmě platí:

1. $d^2 f_A(\mathbf{h}) > 0$ pro každé $\mathbf{h} \neq \mathbf{o}$, právě když $f_{xx} > 0$ a $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0$,

2. $d^2 f_A(\mathbf{h}) < 0$ pro každé $\mathbf{h} \neq \mathbf{o}$, právě když $f_{xx} < 0$ a $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0$,

3. existuje $\mathbf{h} \neq \mathbf{o}$ takové, že $d^2 f_A(\mathbf{h}) > 0$ a existuje $\mathbf{h'} \neq \mathbf{o}$ takové, že $d^2 f_A(\mathbf{h'}) < 0$, právě když $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} < 0$.

V 1. případě nazýváme funkci $d^2 f_A(\mathbf{h})$ **pozitivně definitní**, v 2. případě nazýváme funkci $d^2 f_A(\mathbf{h})$ **negativně definitní** a ve 3. případě nazýváme funkci $d^2 f_A(\mathbf{h})$ **indefinitní**.

Taylorův polynom 2. stupně

Kvadratická aproximace

Připomeňme, že má-li funkce F jedné proměnné t derivace až do řádu $n+1$ na intervalu $\langle 0,1\rangle$, můžeme ji vyjádřit pomocí Taylorova polynomu např. v bodě $t=0$ ve tvaru

$$F(t)=F(0)+F'(0)t+\frac{1}{2}F''(0)t^2+\cdots+\frac{1}{n!}F^{(n)}(0)t^n+R_n, \qquad (13)$$

kde R_n je zbytek, např. v Lagrangeově tvaru

$$R_n=\frac{F^{(n+1)}(\Theta t)}{(n+1)!}t^{n+1}\,,\ \ \Theta\in(0,1).$$

Je-li f funkce dvou proměnných, která je v bodě $A=[a,b]$ diferencovatelná a má v okolí $\mathbb{U}(A)$ spojité parciální derivace do 3. řádu, můžeme definovat funkci F jedné proměnné t předpisem

$$F(t)=f(a+t(x-a),b+t(y-b)).$$

Potom $f(x,y)=F(1)$. Na funkci F nyní použijeme vzorec (13) pro $n=2$. Označíme-li $h_1=x-a$, $h_2=y-b$, je

$$f(A+\mathbf{h})=f(A)+df_A(\mathbf{h})+\frac{1}{2}d^2f_A(\mathbf{h})+R_2, \qquad (14)$$

kde $df_A(\mathbf{h})$ je totální diferenciál a $d^2f_A(\mathbf{h})$ je totální diferenciál 2. řádu,

$$\begin{aligned} d_A(\mathbf{h}) &= \frac{\partial f(A)}{\partial x}h_1+\frac{\partial f(A)}{\partial y}h_2\\ d_A^2(\mathbf{h}) &= \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2}h_1^2+2\frac{\partial^2 f(A)}{\partial x\partial y}h_1h_2+\frac{\partial^2 f(A)}{\partial y^2}h_2^2. \end{aligned}$$

Kvadratický polynom

$$T_2(\mathbf{h})=f(A)+df_A(\mathbf{h})+\frac{1}{2}d^2f_A(\mathbf{h})$$

nazýváme **Taylorův polynom 2. stupně** funkce f v bodě A.

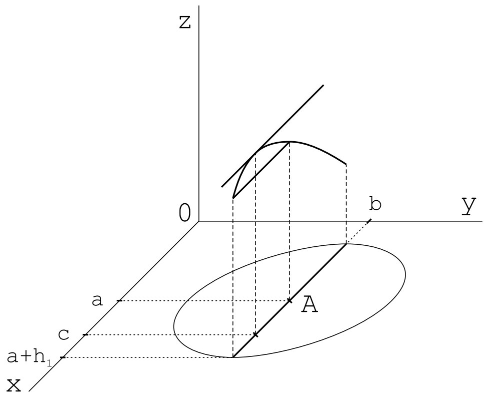
Chybu aproximace přírůstku funkce f, při použití Taylorova polynomu 2. stupně

$$f(A+\mathbf{h})-f(A)\doteq df_A(\mathbf{h})+\frac{1}{2}d^2f_A(\mathbf{h}),$$

můžeme vyjádřit pomocí diferenciálu 3. řádu funkce f

$$R_2(\mathbf{h})=\frac{1}{3!}\,d^3f_C(\mathbf{h}),$$

kde C je nějaký bod z okolí bodu A.



Obr. 13

Pro $n = 0$ dostáváme ze (14) Lagrangeovu větu o střední hodnotě pro funkci dvou proměnných

$$f(A+\mathbf{h}) - f(A) = \frac{\partial f(C)}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f(C)}{\partial y} h_2,$$

kde $C = [c, d]$ je nějaký bod z okolí bodu A, obr. 13. Tedy existuje v intervalu $\langle a, a+h_1 \rangle$ bod c takový, že tečna řezu grafu funkce f rovinou $y = b$ v bodě $[c, b]$ je rovnoběžná s přímkou $[a+h_1, b, f(a+h_1, b)]$, $[a, b, f(A)]$. Analogicky pro řez rovinou $x = a$.

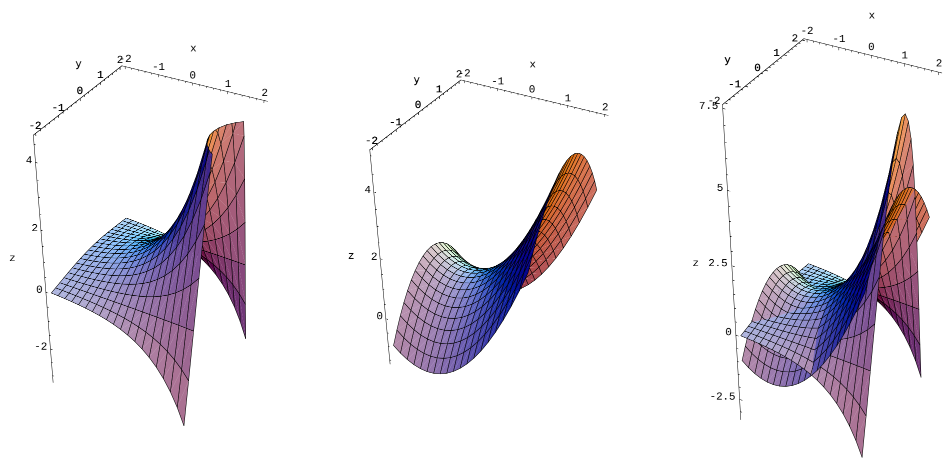
Příklad 12. *Taylorův polynom 2. stupně pro funkci $f(x, y) = e^x \cos y$ (z příkladu 11) v počátku O je*

$$T_2(\mathbf{h}) = 1 + h_1 + \frac{1}{2}(h_1^2 - h_2^2),$$

kde $\mathbf{h} = X - O$. Po dosazení za h_1, h_2 má polynom tvar

$$z = \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}.$$

Jeho grafem je hyperbolický paraboloid viz. druhý obrázek na obr. 14. Na prvním obrázku je graf dané funkce a na třetím graf dané funkce a její Taylorův polynom.



Obr.14

Příklad 13. *Určíme Taylorův polynom 2. stupně funkce $F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2)$ v počátku O. Ten bude tvaru*

$$T_2(\mathbf{h}) = F(O) + d_O F(\mathbf{h}) + \frac{1}{2} d_O^2 F(\mathbf{h}).$$

1. $F(O) = 0$.

2. $F_x = 4x(x^2 + y^2) - 2a^2x$, $F_y = 4y(x^2 + y^2) + 2a^2y$, $d_O F(\mathbf{h}) = 0$.

3. $F_{xx} = 4(3x^2 + y^2) - 2a^2$, $F_{xy} = 8xy$, $F_{yy} = 4(x^2 + 3y^2) + 2a^2$, $d_O^2(\mathbf{h}) = -2a^2h_1^2 + 2a^2h_2^2$.

Pro $\mathbf{h} = X - O$ *je Taylorův polynom*

$$z = 2a^2(y^2 - x^2).$$

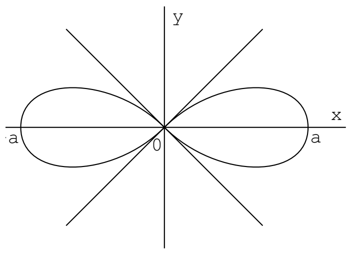
Nulová vrstevnice funkce F *je Bernoulliova lemniskata*

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$$

a nulová vrstevnice Taylorova polynomu T_2 *jsou dvě různoběžné přímky*

$$x - y = 0\,,\ x + y = 0,$$

které jsou tečnami lemniskaty v jejím bodě O*, obr. 15.*

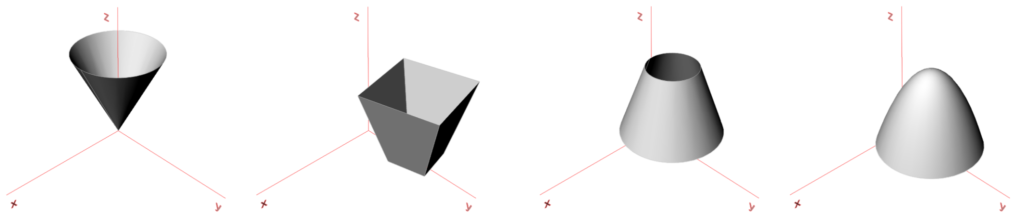


Obr. 15

Extrémy funkcí dvou proměnných

Významnou úlohou jak pro funkce jedné proměnné, tak i pro funkce více proměnných, je hledání největší a nejmenší funkční hodnoty.

Funkce f má v bodě $A \in \mathbb{D}_f$ **ostré lokální minimum**, resp. **ostré lokální maximum**, jestliže existuje prstencové okolí $\mathbb{P}(A)$ bodu A takové, že pro každé $X \in \mathbb{P}(A) \cap \mathbb{D}_f$ je $f(X) > f(A)$, resp. $f(X) < f(A)$.



Funkce f má v bodě $A \in \mathbb{D}_f$ **lokální minimum**, resp. **lokální maximum**, jestliže existuje prstencové okolí $\mathbb{P}(A)$ takové, že pro každé $X \in \mathbb{P}(A) \cap \mathbb{D}_f$ je $f(X) \geq f(A)$, resp. $f(X) \leq f(A)$.

Existuje-li tečná rovina v bodě $[a, b, f(A)]$ grafu funkce f, ve kterém má funkce f extrém, je kolmá na osu z, tj. gradient funkce f je nulový vektor.

To ale k existenci extrému nebude stačit. Např. hyperbolický paraboloid $z = xy$ má v bodě O tečnou rovinu kolmou na osu z a nemá zde extrém. Zatímco kužel nemá ve vrcholu O tečnou rovinu a má v něm extrém.

Nutná podmínka pro existenci lokálního extrému

Nechť funkce f má spojité parciální derivace v bodě $A \in \mathbb{D}_f$, ve kterém má extrém.

Parciální derivaci funkce f podle proměnné x, resp. y jsme definovali jako derivaci funkce jedné proměnné x, resp. y

$$\frac{\partial f(A)}{\partial x} = (f(x, b))'_{x=a}\,, \text{ resp. } \frac{\partial f(A)}{\partial y} = (f(a, y))'_{y=b}.$$

Má-li funkce f v bodě A extrém, mají extrém i řezy rovinami $y = b$, resp. $x = a$, a tedy

$$\frac{\partial f(A)}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial f(A)}{\partial y} = 0.$$

Tedy **funkce může mít lokální extrém v bodě, ve kterém je gradient nulový vektor**.

Jak jsme viděli na obrázku, **funkce může mít extrém také v bodě, ve kterém neexistují parciální derivace**.

Takové body "podezřelé" z existence extrému se nazývají **stacionární body funkce** f.

Postačující podmínka pro existenci lokálního extrému

Nechť funkce f má spojité parciální derivace 1. i 2. řádu v bodě $A \in \mathbb{D}_f$ a $grad\, f(A) = \mathbf{o}$. Vyjádříme ji v okolí bodu A pomocí Taylorova polynomu 2. stupně

$$f(X) = f(A) + \frac{1}{2} d^2 f_A(\mathbf{h}) + R_2(\mathbf{h}).$$

Potom platí: Funkce f má v bodě A

1. **ostré lokální maximum**, jestliže $d^2 f_A(\mathbf{h})$ je **negativně definitní**,
2. **ostré lokální minimum**, jestliže $d^2 f_A(\mathbf{h})$ je **pozitivně definitní**.
3. Funkce f **nemá lokální extrém** v bodě A, je-li $d^2 f_A(\mathbf{h})$ **indefinitní**.

Příklad 14. *Funkce* $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{1}{2}y^2 + 2y$ *má gradient*

$$grad\, f(x,y) = (x^2 - 1, y + 2)$$

roven nulovému vektoru v bodech, pro které $|x| = 1$ *a* $y = -2$*. Tedy stacionární body funkce* f *jsou*

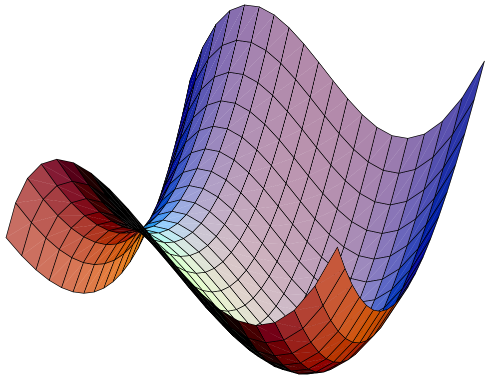
$$A = [-1, -2]\,, \quad B = [1, -2].$$

Druhé parciální derivace funkce f *jsou*

$$f_{xx} = 2x\,, \quad f_{xy} = 0\,, \quad f_{yy} = 1.$$

V bodě A *je* $d^2 f_A(\mathbf{h}) = -2h_1^2 + h_2^2$ *indefinitní, tudíž funkce* f *nemá v bodě* A *extrém.*

V bodě B *je* $d^2 f_B(\mathbf{h}) = 2h_1^2 + h_2^2$ *pozitivně definitní, tudíž funkce* f *má v bodě* B *lokální minimum rovné* $-\frac{8}{3}$*, obr. 16.*



Obr. 16

Vázané extrémy

Lagrangeovy multiplikátory

V mnohých praktických problémech (např. podmínkové vyrovnání v teorii chyb) nehledáme extrémální hodnoty funkce f na celém definičním oboru $\mathbb{D}_f$, ale na nějaké jeho podmnožině $\mathbb{M} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; g(x, y) = 0\}$. Funkce g se nazývá **vazba**. Extrémy funkce f na množině $\mathbb{M}$ se nazývají **vázané extrémy**.

Předpokládejme, že funkce f i g jsou spojité a mají spojité parciální derivace do 2. řádu na množině $\mathbb{M}$.

Budeme-li zkoumat, je-li $A \in \mathbb{M}$ stacionární bod funkce f, budeme zjišťovat jen signaturu (znaménko) čísla $d^2 f_A(\mathbf{t})$, kde $\mathbf{t}$ je tečný vektor křivky $g(x, y) = 0$ v bodě A (extrém hledáme na množině $\mathbb{M}$). Vektor $\mathbf{t}$ je kolmý na vektor $grad\, g(A)$ ($g(x, y) = 0$ je vrstevnice funkce g). Vektor $grad\, f(A)$ bude násobkem vektoru $grad\, g(A)$, tj.

$$grad\, f(A) = \lambda\, grad\, g(A).$$

Rozepsáno do souřadnic

$$\frac{\partial f(A)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(A)}{\partial x} = 0\,, \qquad \frac{\partial f(A)}{\partial y} \lambda \frac{\partial g(A)}{\partial y} = 0.$$

Na levé straně obou rovností jsou parciální derivace funkce

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\, g(x, y)$$

v bodě A, závislé na parametru λ. Funkci L nazýváme **Lagrangeova funkce** a číslo λ nazýváme **Lagrangeův multiplikátor**.

To nás přivádí k ekvivalenci: Funkce f má v bodě A vázaný extrém na množině $\mathbb{M}$, právě když existuje λ, pro které má funkce L v bodě A lokální extrém.

Příklad 15. *Určit extrémy funkce $z = xy$ na množině $\mathbb{M} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 = 4\}$ znamená, určit lokální extrémy Lagrangeovy funkce*

$$L(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 4).$$

Pro stacionární body funkce L platí

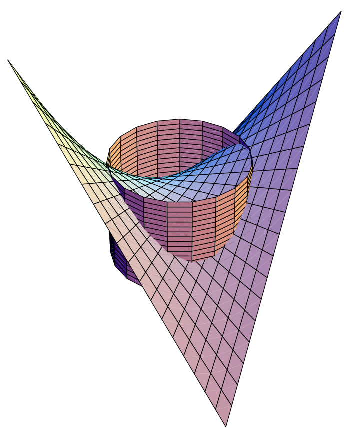
$$\frac{\partial L}{\partial x} = y - 2\lambda x = 0\,, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = x - 2\lambda y = 0\,, \quad x^2 + y^2 - 4 = 0.$$

Z první rovnice vypočítáme $\lambda = \dfrac{y}{2x}$, z druhé rovnice $\lambda = \dfrac{x}{2y}$. Odtud $\dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{y}$, které po dosazení do třetí rovnice dávají čtyři body

$$\lambda = \frac{1}{2} \implies A = [-\sqrt{2}, -\sqrt{2}]\,,\; B = [\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$
$$\lambda = -\frac{1}{2} \implies C = [\sqrt{2}, -\sqrt{2}]\,,\; D = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

Gradient funkce $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ je $grad\, g(x, y) = (2x, 2y)$. V nalezených stacionárních bodech jsou gradient a vektor $\mathbf{t}$ na něj kolmý

$$grad\, g(A) = -2\sqrt{2}(1, 1)\,,\; grad\, g(B) = 2\sqrt{2}(1, 1)\,,\; \mathbf{t} = (1, -1)\,,$$
$$grad\, g(C) = 2\sqrt{2}(1, -1)\,,\; grad\, g(D) = 2\sqrt{2}(-1, 1)\,,\; \mathbf{t} = (1, 1).$$



Obr. 17

Druhý diferenciál funkce L je

$$d^2L(\mathbf{h}) = -2\lambda h_1^2 + 2h_1h_2 - 2\lambda h_2^2$$

a v bodech A, B ($\mathbf{h} = \mathbf{t}$) je záporný, funkce f má v bodech A, B maximum. V bodech C, D je kladný, funkce f má v bodech C, D minimum viz obrázek 17.

Absolutní extrémy funkce

Funkce dvou (i více) proměnných, která je spojitá na uzavřené a omezené množině $\mathbb{M}$, má podobné vlastnosti jako spojitá funkce jedné proměnné na uzavřeném intervalu. Existují body $A, B \in \mathbb{M}$ takové, že $f(A)$ je **minimum funkce na množině** $\mathbb{M}$ a $f(B)$ je **maximum funkce f na množině** $\mathbb{M}$.

Zřejmě funkce může mít extrémy (minimum, resp. maximum) ve stacionárních bodech, které jsou vnitřními body množiny $\mathbb{M}$, nebo na hranici této množiny. Abychom je odlišili od lokálních a vázaných extrémů, nazýváme je **absolutní**, nebo **globální extrémy** funkce f na uzavřené a omezené množině $\mathbb{M}$.

Příklad 16. *Abychom určili extrémy funkce* $f(x, y) = 1 + x^2 + 2y^2$ *na množině* $\mathbb{M} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$, *určíme*

1. **stacionární body funkce f na vnitřku množiny** $\mathbb{M}$.

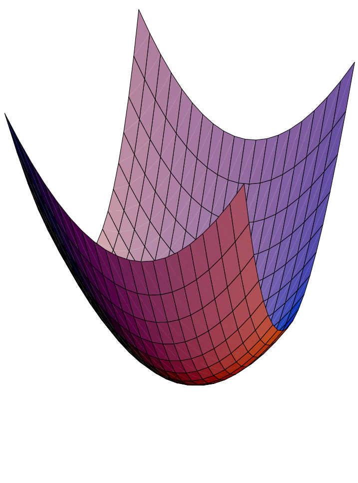
   Anulováním parciálních derivací funkce f dostáváme jediný bod O a funkční hodnotu $f(O) = 1$.

2. **stacionární body na hranici množiny** $\mathbb{M}$.

   Hranice množiny $\mathbb{M}$ je čtverec $MNPQ$. Na hranici $|x| = 1$ je derivace funkcí $f(\pm 1, y) = 2 + 2y^2$ rovna $f'(\pm 1, y) = 4y$. Stacionární body jsou dva, $A = [-1, 0]$, $B = [1, 0]$ a funkční hodnoty v nich jsou $f(A) = f(B) = 2$.

   Analogicky pro hranici $|y| = 1$ dostáváme dva body $C = [0, 1]$, $D = [0, -1]$ a funkční hodnoty v nich $f(C) = f(D) = 3$.

   Stacionárními body hranice jsou vrcholy čtverce, neexistují v nich derivace. Jsou to body $M = [-1, -1]$, $N = [1, -1]$, $P = [1, 1]$, $Q = [-1, 1]$ a funkční hodnota v nich je 4.



Absolutní maximum funkce f je rovno čtyřem ve vrcholech M, N, P, Q hranice množiny $\mathbb{M}$ a absolutní minimum 1 je v bodě O, obr. 18.

Obr. 18

Funkce tří proměnných

Vše co jsme řekli o funkci dvou proměnných můžeme zopakovat pro funkci tří i více proměnných. Problémem by ovšem byl prakticky ve všech případech geometrický význam pojmů.

Funkcí tří proměnných nazýváme každé zobrazení f množiny $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^3$ do množiny $\mathbb{R}$.

Množina těch bodů $[x, y, z] \in \mathbb{M}$, pro které je $f(x, y, z) = c$, nazýváme **hladina** (nebo hladinová plocha) funkce f.

Jestliže pro bod $T = [a, b, c]$ platí $f(a, b, c) = 0$ a funkce f má spojité parciální derivace podle všech tří proměnných a $f_z(T) \neq 0$, potom existuje právě jedna funkce $z = z(x, y)$, pro kterou platí

1. je definována v okolí $\mathbb{U}(A)$ bodu $A = [a, b]$ a $c = z(a, b)$,
2. $f(x, y, z(x, y)) = 0$ pro každé $[x, y] \in \mathbb{U}(A)$,
3. parciální derivace
$$\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} = -\frac{f_x(x,y,z)}{f_z(x,y,z)}, \quad \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} = -\frac{f_y(x,y,z)}{f_z(x,y,z)}$$
jsou spojité v okolí $\mathbb{U}(A)$.

Říkáme, že funkce $z = z(x, y)$ je definována v okolí bodu T implicitně rovnicí $f(x, y, z) = 0$.

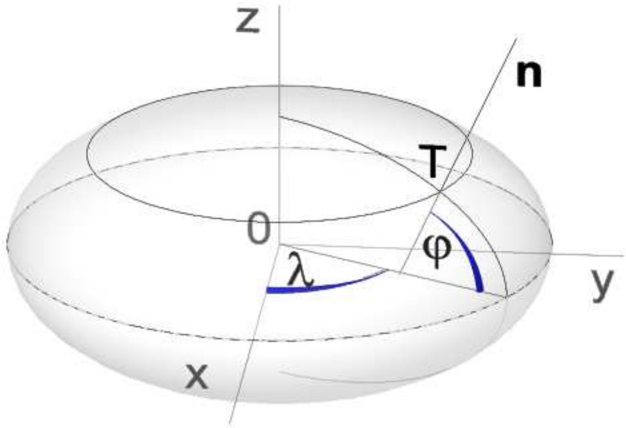
Tečná rovina hladiny $f(x, y, z) = 0$ v bodě T je dána rovnicí

$$-\frac{f_x(T)}{f_z(T)}(x-a) - \frac{f_y(T)}{f_z(T)}(y-b) = z - c.$$

Po úpravě
$$f_x(T)(x-a) + f_y(T)(y-b) + f_z(T)(z-c) = 0.$$

Tedy gradient funkce f v bodě T je kolmý na hladinu, určuje normálu hladiny. Aby rovnicí $f(x, y, z) = 0$ byla určena funkce $z = z(x, y)$, tento gradient nemůže být kolmý na osu z.

Příklad 17. *Geodetická šířka bodu T na referenčním elipsoidu, tj. rotačním zploštělém elipsoidu, je odchylka jeho normály od roviny rovníku. Geodetická délka bodu T je odchylka roviny nultého poledníku od roviny místního poledníku bodu T, obr. 19.*



Obr. 19

Určeme geodetickou severní šířku a geodetickou délku bodu $T = [\frac{1}{2}, 1, ?]$ *elipsoidu daného rovnicí*

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + z^2 = 1.$$

Třetí souřadnice bodu T *je* $z = \sqrt{\frac{3}{8}}$.

Gradient funkce $f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + z^2 - 1$ *v bodě* T *je*

$$\mathbf{n} = (x, y, 2z)_T = \left(\frac{1}{2}, 1, \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

Jeho kolmý průmět do roviny xy *je* $\mathbf{n}_1 = (\frac{1}{2}, 1, 0)$. *Pro úhel* φ *vektorů* $\mathbf{n}$ *a* $\mathbf{n}_1$ *je*

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{n}\mathbf{n}_1}{|\mathbf{n}||\mathbf{n}_1|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}}.$$

Geodetická šířka bodu T *je* $\varphi = 47,6°$.

Při volbě nultého poledníku v rovině xz *bude geodetická délka* λ *rovna úhlu vektorů* $(1, 0)$, $T_1 - O = (\frac{1}{2}, 1)$ *(nebo jejich násobků), tj.*

$$\cos\lambda = \frac{(1, 0)(1, 2)}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Tedy geodetická délka bodu T *je* $\lambda = 63,4°$.